



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ ΚΑΙ ΣΥΓΚΟΙΝΩΝΙΑΚΗΣ ΥΠΟΔΟΜΗΣ

Μελέτη προβλήματος χρονοπρογραμματισμού  
οχημάτων για αποσπώμενα ηλεκτρικά λεωφορεία

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Στέφανου Βιώνη

Επιβλέπων: Κωνσταντίνος Γχιουσαλίτης  
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΙΔΗΡΟΔΡΟΜΙΚΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ  
Αθήνα, Οκτώβριος 2024





Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών  
Τομέας Μεταφορών και Συγκοινωνιακής Υποδομής  
Εργαστήριο Σιδηροδρομικής Τεχνικής και Μεταφορών

# Μελέτη προβλήματος χρονοπρογραμματισμού οχημάτων για αποσπώμενα ηλεκτρικά λεωφορεία

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Στέφανου Βιώνη

**Επιβλέπων:** Κωνσταντίνος Γχιουσαλίτης  
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2024

Copyright © – All rights reserved Στέφανος Βιώνης, 2024.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

# Περίληψη

Η παρούσα μελέτη αποσκοπεί στην ενσωμάτωση της χρήσης του σχεδιασμού αποσπώμενων λεωφορείων στην υπάρχουσα διατύπωση του προβλήματος προγραμματισμού οχημάτων ηλεκτρικών λεωφορείων πολλαπλών σταθμών με χρονικά παράθυρα (EB-MDVSP<sub>TW</sub>). Κάθε μέρος της αρχικής διατύπωσης επεκτείνεται λαμβάνοντας υπόψη το νέο σύστημα αποσπώμενων λεωφορείων. Η διατύπωσή μας λαμβάνει υπόψη τις καινούργιες θέσεις για τις εργασίες ζεύξης/αποζεύξης που πρέπει να εκτελεστούν, την ικανότητά τους να εκτελούνται με βάση τις απαιτήσεις του ταξιδιού, τον αντίκτυπο που έχουν στην καταναλισκόμενη ενέργεια του οχήματος και το κόστος λειτουργίας. Εισάγουμε πολλαπλούς περιορισμούς και τους γραμμικοποιούμε όταν χρειάζεται προκειμένου να διατηρήσουμε τη διατύπωση του μικτού ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού (MILP). Η αντικειμενική συνάρτηση επεκτείνεται επίσης για να ενσωματώσει τους πρόσθετους παράγοντες των αποσπώμενων μονάδων και καταλήγει σε μια διατύπωση πολλαπλών στόχων. Παρουσιάζεται ένα δίκτυο με ιδεατά δεδομένα (Toy-Network) για να παρουσιαστούν λεπτομερώς τα αποτελέσματα των αλλαγών μας. Τέλος, πραγματοποιούνται αριθμητικά πειράματα με τη χρήση του λογισμικού βελτιστοποίησης Gurobi, προκειμένου να εξεταστούν τα αποτελέσματα της διατύπωσής μας στους υπολογιστικούς χρόνους και το κόστος απόδοσης. Καταφέρνουμε να επιτύχουμε μείωση του κόστους έως και 19,85% στο καλύτερο σενάριο. Συνιστάται, ωστόσο, προσοχή, διότι ενώ επιτυγχάνεται μείωση του κόστους μπορεί να παρατηρηθεί και το αντίθετο αποτέλεσμα σε ορισμένες περιπτώσεις.

**Λέξεις Κλειδιά** Σχεδιασμός αποσπώμενων λεωφορείων, πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού λεωφορείων, μικτός ακέραιος γραμμικός προγραμματισμός, ηλεκτρικά λεωφορεία, σταθμοί φόρτισης, χρονικά παράθυρα, Branch and cut, Dual simplex, Gurobi, Python,



# Abstract

This study aims to incorporate the use of modular bus design into the existing formulation of electric bus multi-depot vehicle scheduling problem with time windows (EB-MDVSPWTW). Every part of the original formulation is extended take into account the newly modular bus system. Our formulation considers the newly added locations for the coupling/ uncoupling tasks to be performed, their ability to be performed based on the trip requirements and also the impact they have on vehicle consumed energy and cost of operation. We introduce multiple constraints and linearize them when needed in order to maintain the Mixed Integer Linear Programming (MILP) formulation. The objective function is also extended to incorporate the additional factors of the modular units and ending in a multi-objective formulation. A toy-network is presented to show in detail the effects of our changes. Lastly, numerical experiments using Gurobi, are performed in order to examine the results of our formulation to computational times and performance costs. We manage to achieve a cost reduction of up to 19.85% at the best case scenario. Caution, though is advised because while achieving cost reduction the opposite effect can also be observed in certain cases.

**Keywords** Mixed Integer Linear Programming, Modular Bus Design, Modular units, Modular units storage, Electric vehicle scheduling problem, time windows, charging stations, Vehicle Scheduling Problem, Branch and cut, Dual simplex, Gurobi, Python, Time Windows





# Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τα άτομα που συνετέλεσαν στο ταξίδι αυτό και την τελική ολοκλήρωση των προπτυχιακών σπουδών μου στη Σχολή των Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον τον επιβλέποντα καθηγητή μου Κωνσταντίνο Γκιουτσαλίτη, Επίκουρο Καθηγητή της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών Ε.Μ.Π., για την ευκαιρία που μου έδωσε να εκπονήσω την διπλωματική μου εργασία υπο την επίβλεψη του, καθώς και την καθοδήγηση που μου έδωσε καθ'όλη την διάρκεια της εκπόνησης της.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Γιάννη Καμπούρη, υποψήφιο διδάκτορα ΕΜΠ, για τη βοήθεια και το χρόνο που αφιέρωσε.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, τους γονείς μου και ιδιαίτερα την αδερφή μου Αλέξανδρα, για όλη την υποστήριξη που μου έδωσαν κατά την διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας αλλά και όλα τα χρόνια των σπουδών μου. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους που έκανα κατά την διάρκεια των φοιτητικών μου χρόνων, μαζί με τους οποίους κατάφερα να ολοκληρώσω τον ταξίδι αυτό.

Βιώνης Στέφανος  
Οκτώβριος 2024



# Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	xī
Λίστα Σχημάτων	xiii
Κατάλογος Πινάκων	xv
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Εισαγωγή	2
<b>2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση</b>	<b>5</b>
2.1 Πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού οχημάτων	6
2.1.1 Μοντέλο ελάχιστης διάσπασης	6
2.1.2 Μοντέλο ανάθεσης	7
2.1.3 Μοντέλο μεταφοράς	7
2.1.4 Μοντέλο ροής δικτύου	8
2.1.5 Μοντέλα ενός εμπορεύματος	9
2.1.5.1 Μοντέλο ενός εμπορεύματος με περιορισμούς διακοπής υπο- διαδρομών	9
2.1.5.2 Μοντέλο ενός εμπορεύματος με μεταβλητές ανάθεσης	10
2.1.6 Μοντέλα πολλαπλών εμπορευμάτων	10
2.1.6.1 Μοντέλα βασισμένα σε συνδέσεις	10
2.1.6.2 Μοντέλα Χωροχρονικών Δικτύων	11
2.1.7 Μοντέλα διαμερισμού συνόλων	11
2.2 Χρονοπρογραμματισμός οχημάτων για ηλεκτρικά λεωφορεία	11
2.3 Χρονοπρογραμματισμός οχημάτων για αποσπώμενα λεωφορεία	14
<b>3 Διατύπωση μοντέλου</b>	<b>17</b>
3.1 Εισαγωγή	18
3.2 Σύνολα	22
3.3 Παράμετροι	23
3.4 Μεταβλητές	24
3.5 Περιορισμοί	24
3.5.1 Περιορισμοί προγραμματισμού οχημάτων	25
3.5.2 Περιορισμοί ηλεκτρικής φόρτισης	26

3.5.3	Περιορισμοί αποσπώμενων μονάδων	27
3.6	Αντικειμενική συνάρτηση	27
3.7	Γραμμική μετατροπή του EB-MDVSPΤW με αποσπώμενα λεωφορεία	28
3.8	Έγκυρες ανισότητες	34
3.8.1	Αναγωγές συνόλων τόξων	35
3.8.2	Αναγωγές SOC	35
3.8.3	Μειώσεις γεγονότων φόρτισης	36
3.8.4	Μειώσεις του χρόνου έναρξης των υπηρεσιών	36
3.8.5	Αντιφατικές αναγωγές τόξων	37
3.8.5.1	Ορισμός	37
<b>4</b>	<b>Εφαρμογή σε ιδεατό δίκτυο</b>	<b>39</b>
4.1	Επεξήγηση Προβλήματος	40
4.2	Παρουσίαση Αποτελεσμάτων	43
<b>5</b>	<b>Υπολογιστικά αποτελέσματα</b>	<b>47</b>
5.1	Επεξήγηση Κατάστρωσης προβλήματος	48
5.2	Αποτελέσματα προβλήματος	48
5.2.1	1η Περίπτωση	49
5.2.2	2η Περίπτωση	49
5.2.3	3η Περίπτωση	50
5.2.4	4η Περίπτωση	50
5.2.5	5η Περίπτωση	51
5.2.6	6η Περίπτωση	51
5.2.7	Σύγκριση Αποτελεσμάτων Διαφορετικών περιπτώσεων	53
5.3	Περιορισμοί έρευνας	54
<b>6</b>	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>55</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>57</b>
	<b>Παράρτημα: Κώδικας Python</b>	<b>61</b>

# Λίστα Σχημάτων

1.1.1 Παράδειγμα αποσπώμενου λεωφορείου . . . . .	3
2.1.1 Κατευθυνόμενο γράφημα μοντέλου ροής δικτύου (Network flow model directed graph) . . . . .	9
2.1.2 Γράφημα μοντέλου βασισμένο σε συνδέσεις . . . . .	11
3.1.1 Φυσική αναπαράσταση του δικτύου $G^k = \{N^k, A^k\}$ ενός οχήματος k . . . . .	20
3.1.2 Μοντελοποιημένη αναπαράσταση του δικτύου $G^k = \{N^k, A^k\}$ ενός οχήματος k . . . . .	21
3.1.3 Παράδειγμα χρόνων ταξιδιού διάρκειαςμεταξύ/εντός εργασιών και χρονικών παραθύρων. . . . .	22



# Κατάλογος Πινάκων

2.1	Πίνακας μοντέλου ανάθεσης $n \times n$ . . . . .	7
2.2	Πίνακας μοντέλου μεταφοράς $n \times n$ . . . . .	8
2.3	Σύνοψη μελετών προγραμματισμού ηλεκτρικών οχημάτων. . . . .	16
4.1	Συντεταγμένες Γεγονότων . . . . .	41
4.2	Χρόνος ταξιδιού, καταναλισκόμενη ενέργεια για όχημα χωρίς αποσπώμενες μονάδες και αποσπώμενες μονάδες που απαιτούνται κατά την εκτέλεση κάθε διδρομής $i \in V$ . . . . .	42
4.3	Χρονικό περιθώριο για κάθε γεγονός. . . . .	42
4.4	Χρόνος $T_i^k$ που αρχίζει κάθε γεγονός, ενέργεια $e_i^k$ , $\bar{e}_i^k$ και απαίτηση αποσπώμενης μονάδας $w_i$ , $\bar{k}_i^k$ για κάθε κόμβο $i \in N$ που επισκέπτεται το όχημα $k = 1$ . . . .	44
4.5	Χρόνος $T_i^k$ που αρχίζει κάθε γεγονός, ενέργεια $e_i^k$ , $\bar{e}_i^k$ και απαίτηση αποσπώμενης μονάδας $w_i$ , $\bar{k}_i^k$ για κάθε κόμβο $i \in N$ που επισκέπτεται το όχημα $k = 2$ . . . .	45
5.1	Περιπτώσεις(instances) του προβλήματος EB-MDVSPTW. . . . .	48
5.2	Απαίτηση αποσπώμενων μονάδων για το ταξίδι $i \in V$ . . . . .	49
5.3	Αποτελέσματα για περίπτωση(instance) με 8 δρομολόγια(trips). CNS: Περιορισμοί, NE: B&B Διερευνούντες Κόμβοι, SI: Προσεγγίσεις Simplex, CT: Χρόνος υπολογισμού σε λεπτά, SP: Απόδοση λύσης, OG: Χάσμα βέλτιστης λειτουργίας. . . .	49
5.4	Απαίτηση αποσπώμενων μονάδων για το ταξίδι $i \in V$ . . . . .	49
5.5	Αποτελέσματα για περίπτωση(instance) με 8 δρομολόγια(trips). CNS: Περιορισμοί, NE: B&B Διερευνούντες Κόμβοι, SI: Προσεγγίσεις Simplex, CT: Χρόνος υπολογισμού σε λεπτά, SP: Απόδοση λύσης, OG: Χάσμα βέλτιστης λειτουργίας. . . .	50
5.6	Απαίτηση αποσπώμενων μονάδων για το ταξίδι $i \in V$ . . . . .	50
5.7	Αποτελέσματα για περίπτωση(instance) με 8 δρομολόγια(trips). CNS: Περιορισμοί, NE: B&B Διερευνούντες Κόμβοι, SI: Προσεγγίσεις Simplex, CT: Χρόνος υπολογισμού σε λεπτά, SP: Απόδοση λύσης, OG: Χάσμα βέλτιστης λειτουργίας. . . .	50
5.8	Απαίτηση αποσπώμενων μονάδων για το ταξίδι $i \in V$ . . . . .	50
5.9	Αποτελέσματα για περίπτωση(instance) με 8 δρομολόγια(trips). CNS: Περιορισμοί, NE: B&B Διερευνούντες Κόμβοι, SI: Προσεγγίσεις Simplex, CT: Χρόνος υπολογισμού σε λεπτά, SP: Απόδοση λύσης, OG: Χάσμα βέλτιστης λειτουργίας. . . .	51
5.10	Απαίτηση αποσπώμενων μονάδων για το ταξίδι $i \in V$ . . . . .	51

5.11	Αποτελέσματα για περίπτωση(instance) με 8 δρομολόγια(trips). CNS: Περιορισμοί, NE: B&B Διερευνούντες Κόμβοι, SI: Προσεγγίσεις Simplex, CT: Χρόνος υπολογισμού σε λεπτά, SP: Απόδοση λύσης, OG: Χάσμα βέλτιστης λειτουργίας.	51
5.12	Απαίτηση αποσπώμενων μονάδων για το ταξίδι $i \in V$ . . . . .	51
5.13	Αποτελέσματα για περίπτωση(instance) με 8 δρομολόγια(trips). CNS: Περιορισμοί, NE: B&B Διερευνούντες Κόμβοι, SI: Προσεγγίσεις Simplex, CT: Χρόνος υπολογισμού σε λεπτά, SP: Απόδοση λύσης, OG: Χάσμα βέλτιστης λειτουργίας.	52
5.14	Συγκριτικός πίνακας αποτελεσμάτων κάθε περίπτωσης(instance). CNS: Περιορισμοί, NE: B&B Διερευνούντες Κόμβοι, SI: Προσεγγίσεις Simplex, CT: Χρόνος υπολογισμού σε λεπτά, SP: Απόδοση λύσης, OG: Χάσμα βέλτιστης λειτουργίας.	53







# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

---

1.1 Εισαγωγή.....	2
-------------------	---

---

## 1.1 Εισαγωγή

Ο τομέας των μεταφορών και η σημαντική ανάπτυξή του τις τελευταίες δεκαετίες διαδραματίζουν τεράστιο ρόλο στην ανάπτυξη και την απασχόληση της σημερινής κοινωνίας, ενώ παράλληλα έχουν τεράστιο αντίκτυπο στο περιβάλλον με τις απαιτήσεις του για κατανάλωση ενέργειας και τις εκπομπές αερίων του θερμοκηπίου (Abraham et al. (2012)). Η παγκόσμια αστάθεια και αβεβαιότητα που δημιουργήθηκε τα τελευταία χρόνια είχε βαθιά επίδραση στους πόρους καυσίμων καθιστώντας την ανάγκη για υπηρεσίες αστικών μεταφορών ακόμη πιο αναγκαία. Η παροχή βέλτιστου σχεδιασμού με παράλληλη αξιοποίηση των νέων τεχνολογιών είναι απαραίτητη για την επίτευξη περιβαλλοντικών στόχων όπως η Συμφωνία του Παρισιού (Paris Agreement) που υιοθετήθηκε το 2015 στη Διάσκεψη των Ηνωμένων Εθνών για την Κλιματική Αλλαγή (COP21) (Paris-Agreement). Έχει υπογραφεί από 195 χώρες και είναι σήμερα σε ισχύ. Επιπλέον, η Ευρωπαϊκή Ένωση έχει καταλήξει σε συμφωνία για την απαγόρευση όλων των μη ηλεκτρικών οχημάτων έως το 2035, καθιστώντας τη σταδιακή μετάβαση των δημόσιων μεταφορών σε λύσεις χωρίς άνθρακα εξαιρετικά σημαντική.

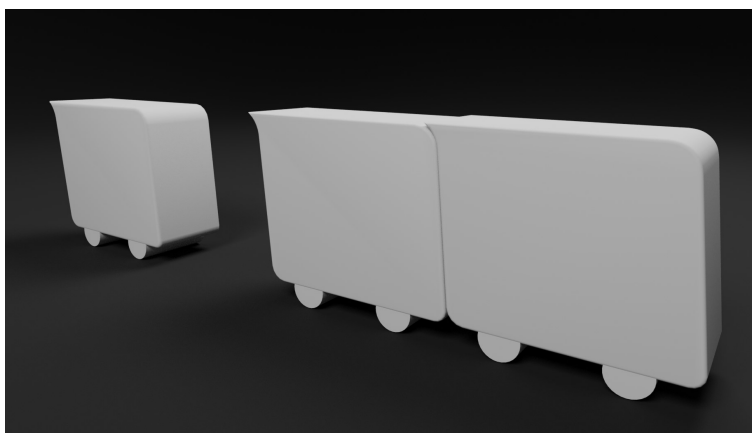
Τα ηλεκτρικά οχήματα (EVs), μέρα με τη μέρα γίνονται όλο και πιο προσιτά και πρόκειται να αποτελέσουν αναγκαιότητα για την πλειονότητα των μεταφορών (Falchetta and Noussan (2021)). Στην πράξη, η μετάβαση αυτή αποτελεί σημαντική πρόκληση για τους μηχανικούς, τους σχεδιαστές και τις κυβερνήσεις που πρέπει να εξασφαλίσουν τη χρηματοδότηση προκειμένου να διεξαχθεί η κατάλληλη έρευνα και να κατασκευαστούν οι κατάλληλες υποδομές (Paris-Agreement). Περιορισμοί όπως η περιορισμένη εμβέλεια οδήγησης, οι μεγάλοι χρόνοι φόρτισης, η διαθεσιμότητα της υποδομής φόρτισης και το υψηλό κόστος αγοράς αποθαρρύνουν αρχικά και επομένως κάθε βήμα της μεταβατικής διαδικασίας πρέπει να συνοδεύεται από αρκετή έρευνα και ένα ρεαλιστικό μοντέλο προγραμματισμού προκειμένου να υλοποιηθεί.

Υπάρχουν πολλές μεταβλητές που πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά τη διαδικασία ενός προβλήματος προγραμματισμού ηλεκτρικών οχημάτων (Electric Vehicle Scheduling Problem - E-VSP), οι οποίες εισάγουν ένα νέο επίπεδο πολυπλοκότητας στο πρόβλημα προγραμματισμού (Reuer et al. (2015), Wen et al. (2016)). Η ποικιλία των διαφορετικών τεχνολογιών φόρτισης οχημάτων εισάγει διακριτές μεθοδολογικές περιπλοκές στο Πρόβλημα Χρονοπρογραμματισμού Οχημάτων (Vehicle Scheduling Problem - VSP). Η ανάγκη ενσωμάτωσης των ταξιδιών φόρτισης οχημάτων στη διαδικασία προγραμματισμού με ταυτόχρονη διατήρηση του υφιστάμενου επιπέδου εξυπηρέτησης περιπλέκει επίσης το πρόβλημα περαιτέρω. Οι δραστηριότητες φόρτισης ανάλογα με την επιλεγμένη μέθοδο αποτελούν ένα επιπλέον εμπόδιο. Η πληθώρα των τρόπων φόρτισης, από τη φόρτιση κατά τη διάρκεια της νύχτας έως τη φόρτιση ευκαιρίας, θα μπορούσαν ενδεχομένως να προσθέσουν επιπλέον στοιχεία εισόδου (inputs) για το VSP και να αυξήσουν επίσης τις ανησυχίες για την αξιοπιστία του δικτύου. Επομένως, οι αλλαγές που πρέπει να γίνουν προκειμένου η ανάπτυξη ενός ηλεκτρικού στόλου λεωφορείων να είναι επιτυχής θα πρέπει να έχουν πάντα στο επίκεντρο την ικανοποίηση των πελατών του.

Η παρούσα μελέτη αποσκοπεί στην ενσωμάτωση ενός συστήματος αποσπώμενου λεωφορείων (Modular Bus System) στο πρόβλημα προγραμματισμού ηλεκτρικών οχημάτων (E-VSP), προκειμένου να αυξηθεί η αποτελεσματικότητα και η ποιότητα των υπηρεσιών μεταφοράς. Λόγω του καινοτόμου χαρακτήρα του, τα προσαρμοζόμενα λεωφορεία (Customized Buses - CB) έχουν

εφαρμοστεί με επιτυχία σε πολλές πόλεις σε όλο τον κόσμο, όπως στη Λισαβόνα, στο Σαν Φρανσίσκο (Eiró et al. (2011)) και στην Κίνα σε περισσότερες από 30 πόλεις (Liu and Ceder (2015)). Παρά την αυξανόμενη αποδοχή των CBs, οι μελέτες σχετικά με τον λειτουργικό σχεδιασμό των δικτύων τους είναι περιορισμένες. Ουσιαστικά όμως, αποτελούν μια παραλλαγή του παραδοσιακού προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων. Οι υπάρχουσες μελέτες υιοθετούν ως επί το πλείστον μια υπόθεση "όλα ή τίποτα" (all-or-nothing assumption) ή μια μέθοδο διάσπασης (Decomposition Method). Αυτές οι μέθοδοι συνήθως δεν παράγουν τα βέλτιστα αποτελέσματα, με αποτέλεσμα να απαιτούνται πρόσθετοι περιορισμοί στον προγραμματισμό των ηλεκτρικών οχημάτων, δεδομένου ότι η εμβέλεια των μπαταριών και οι περιορισμοί φόρτισης είναι κάποιες από τις κύριες ανησυχίες. Αυτός ο συνδυασμός μπορεί να προσφέρει πιο αποτελεσματικές υπηρεσίες μεταφοράς μαζί με καλύτερη προσαρμοστικότητα στις έντονες απαιτήσεις των επιβατών κατά τη διάρκεια συγκεκριμένων χρονικών περιόδων.

Τα παραδοσιακά συστήματα δημόσιας συγκοινωνίας χρησιμοποιούν οχήματα με σταθερή χωρητικότητα, τα οποία, αφού δρομολογηθούν, δεν μπορούν να μεταβάλουν τη χωρητικότητά τους ανάλογα με τη χρονική ή χωρική ζήτηση. Τα αποσπώμενα οχήματα (Modular Vehicles - MVs) που έχουν τη δυνατότητα να αλλάζουν το μέγεθός τους, μπορούν να βελτιώσουν σημαντικά την ποιότητα των υπηρεσιών μεταφοράς, καθώς μπορούν να προσαρμόζουν τη χωρητικότητά τους ανάλογα με τα παρεχόμενα δεδομένα. Ζητήματα όπως ο υπερπληθυσμός κατά τις ώρες αιχμής και οι μεγάλοι χρόνοι αναμονής κατά τις ώρες εκτός αιχμής μπορούν να καταπολεμηθούν με την αξιοποίηση αναδυόμενων τεχνολογιών όπως τα αποσπώμενα οχήματα. Όπως φαίνεται στην (1.1.1), τα οχήματα αυτά μπορούν να επεκτείνουν δυναμικά το μέγεθός τους μέσω της φυσικής σύζευξης και αποσύζευξης αποσπώμενων μονάδων, ενώ παράλληλα επιτρέπουν στους επιβάτες να μετακινούνται και να αναδιανέμονται μεταξύ των συναρμολογημένων μονάδων με τη χρήση των ενσωματωμένων μπροστινών και πίσω θυρών. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, ακόμη και αν σκεφτεί κανείς ότι τα αποσπώμενα οχήματα μπορούν να μειώσουν το κόστος λόγω της πρόσθετης βελτιστοποίησης που παρέχουν για τον χειριστή και του χαμηλότερου κόστους αναμονής των επιβατών, εισάγουν πρόσθετη πολυπλοκότητα στο VSP. Θα πρέπει επίσης να ληφθεί υπόψη η κατάλληλη υποδομή για τη διαδικασία σύζευξης/αποσύζευξης οχημάτων χωρίς να παρεμποδίζεται η κυκλοφορία, ιδίως σε ώρες αιχμής, καθώς και η ηλεκτρική φύση των οχημάτων που περιορίζει την αυτονομία τους και απαιτεί επίσης χώρο για τη διαδικασία φόρτισης.



Σχήμα 1.1.1: Παράδειγμα αποσπώμενου λεωφορείου



## Κεφάλαιο 2

# Βιβλιογραφική ανασκόπηση

---

<b>2.1</b>	<b>Πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού οχημάτων</b>	<b>6</b>
2.1.1	Μοντέλο ελάχιστης διάσπασης	6
2.1.2	Μοντέλο ανάθεσης	7
2.1.3	Μοντέλο μεταφοράς	7
2.1.4	Μοντέλο ροής δικτύου	8
2.1.5	Μοντέλα ενός εμπορεύματος	9
2.1.5.1	Μοντέλο ενός εμπορεύματος με περιορισμούς διακοπής υπο-διαδρομών	9
2.1.5.2	Μοντέλο ενός εμπορεύματος με μεταβλητές ανάθεσης	10
2.1.6	Μοντέλα πολλαπλών εμπορευμάτων	10
2.1.6.1	Μοντέλα βασισμένα σε συνδέσεις	10
2.1.6.2	Μοντέλα Χωροχρονικών Δικτύων	11
2.1.7	Μοντέλα διαμερισμού συνόλων	11
<b>2.2</b>	<b>Χρονοπρογραμματισμός οχημάτων για ηλεκτρικά λεωφορεία</b>	<b>11</b>
<b>2.3</b>	<b>Χρονοπρογραμματισμός οχημάτων για αποσπώμενα λεωφορεία</b>	<b>14</b>

---

## 2.1 Πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού οχημάτων

Το πρόβλημα προγραμματισμού οχημάτων (VSP) είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης που αποτελεί μέρος του επιχειρησιακού σχεδιασμού των συστημάτων δημόσιων μεταφορών. Στο VSP, ανατίθενται καθήκοντα σε λεωφορεία για την κάλυψη ενός δεδομένου συνόλου δρομολογίων που υπόκεινται σε λειτουργικούς περιορισμούς. Οι δύο κύριες κατηγορίες VSP είναι, το VSP μίας αποθήκης (Single Depot - Vehicle Scheduling Problem - SD-VSP) και το VSP πολλαπλών αποθηκών (Multiple Depot - Vehicle Scheduling Problem - MD-VSP) [Bunte and Kliwer \(2009\)](#). Η διαδικασία ξεκινά με τη συλλογή ή την πρόβλεψη δεδομένων της ζήτησης επιβατών. Με βάση τους πίνακες ζήτησης, πρέπει να ορίζεται η υποδομή του δικτύου δημόσιων συγκοινωνιών και με βάση αυτή καθορίζονται οι διαδρομές και τα σημεία στάσης για τις διάφορες γραμμές. Στη συνέχεια ορίζονται συγκεκριμένες διαδρομές για συγκεκριμένες γραμμές. Για κάθε ταξίδι καθορίζεται σε ένα χρονοδιάγραμμα η ώρα αναχώρησης και άφιξης καθώς και οι σταθμοί αφετηρίας και τερματισμού. Κάθε πρόσθετη διαδικασία προγραμματισμού επικεντρώνεται στην αποτελεσματική χρήση των πόρων και διασφαλίζει ότι τα οχήματα και οι οδηγοί εξυπηρετούν όλα τα προγραμματισμένα δρομολόγια. Οι δύο βασικοί στόχοι είναι η ελαχιστοποίηση των οχημάτων που λειτουργούν και των μη παραγωγικών χρόνων, όπως οι νεκροί χρόνοι δρομολογίων (deadhead times), οι στάσεις κ.λπ. Αυτοί οι δύο στόχοι δεν είναι πάντα συμπληρωματικοί.

Μετά τον επιτυχή ορισμό του προβλήματος, η προσοχή πρέπει να στραφεί στη χρήση της κατάλληλης μεθόδου ανάλογα με το VSP. Σε αυτό το μέρος, παρέχεται μια επισκόπηση των μεθόδων που χρησιμοποιούνται συνήθως. Ξεκινώντας από το SD-VSP υπάρχουν τέσσερα μοντέλα που χρησιμοποιούνται κυρίως, αυτά είναι το μοντέλο ελάχιστης διάσπασης (Minimal Decomposition Model), το μοντέλο ανάθεσης (Assignment Model), το μοντέλο μεταφοράς (Transportation Model) και το μοντέλο ροής δικτύου (Network Flow Model). Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζεται μια σύντομη επεξήγηση κάθε μοντέλου.

### 2.1.1 Μοντέλο ελάχιστης διάσπασης

Το μοντέλο αυτό διαιρεί το πρόβλημα σε μικρότερα συστατικά ή ενότητες που μπορούν να επιλυθούν ξεχωριστά, με κάθε τμήμα να αντιπροσωπεύει μια ξεχωριστή πτυχή του προβλήματος. Στον προγραμματισμό οχημάτων τα συστατικά αυτά αφορούν συνήθως τη δρομολόγηση των οχημάτων ανάλογα με τη διαθεσιμότητα των πόρων του συγκεκριμένου προβλήματος και τη δημιουργία χρονοδιαγράμματος ανάλογα με τους παρεχόμενους περιορισμούς. Αφού καθοριστεί η σειρά τους και η σχέση μεταξύ των δρομολογίων στο [\(Saha \(1970\)\)](#), το μοντέλο υπολογίζει τη σχέση τους σύμφωνα με τους χρόνους αναχώρησης και άφιξης. Η ιδέα του μοντέλου βασίζεται στο θεώρημα Dilworth για μερικά διατεταγμένα σύνολα [\(Dilworth \(1950\)\)](#). Αναδιατυπώνοντας το πρόβλημα ως πρόβλημα ροής δικτύου οι ερευνητές καταφέρνουν να βρουν λύση. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι ζητήματα όπως το deadheading απαιτούν τη χρήση μιας ευρετικής (heuristic) προσέγγισης προκειμένου να επιλυθούν αποτελεσματικά. Τέλος, το Μοντέλο Ελάχιστης Διάσπασης έχει ορισμένα μειονεκτήματα, όπως η αδυναμία εφαρμογής ενός ανώτερου ορίου για το μέγεθος του στόλου και ο σεβασμός του λειτουργικού κόστους, ενώ παράλληλα είναι πραγματικά ευαίσθητο σε αλλαγές λόγω της πολύπλοκης φύσης του διαχωρισμού του προβλήματος σε



ενότητες.

### 2.1.2 Μοντέλο ανάθεσης

Το μοντέλο ανάθεσης (Assignment Model) είναι ένα κλασικό μοντέλο ακέραίου γραμμικού προγραμματισμού 0-1. Συχνά αναπαρίσταται ως πίνακας όπου οι γραμμές αντιπροσωπεύουν τους πράκτορες (agents) και οι στήλες τις εργασίες (tasks). Συγκεκριμένα, στον προγραμματισμό οχημάτων οι πράκτορες (agents) αναπαρίστανται συνήθως από οχήματα και οι εργασίες (tasks) από τις αντίστοιχες διαδρομές τους. Επιπλέον, οι καταχωρήσεις του πίνακα αντιπροσωπεύουν το χρόνο ή την απόσταση που συνδέεται με την ανάθεση ενός συγκεκριμένου οχήματος σε μια συγκεκριμένη διαδρομή. Ένα παράδειγμα πίνακα φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

		<i>Routes</i>						
		1	2	3	....	j	....	n
<i>Vehicles</i>	1	$X_{11}$	$X_{12}$	$X_{13}$	....	$X_{1j}$	....	$X_{1n}$
	2	$X_{21}$	$X_{22}$	$X_{23}$	....	$X_{2j}$	....	$X_{2n}$
	3	$X_{31}$	$X_{32}$	$X_{33}$	....	$X_{3j}$	....	$X_{3n}$
	i	$X_{i1}$	$X_{i2}$	$X_{i3}$	....	$X_{ij}$	....	$X_{in}$
	n	$X_{n1}$	$X_{n2}$	$X_{n3}$	....	$X_{nj}$	....	$X_{nn}$

Πίνακας 2.1: Πίνακας μοντέλου ανάθεσης  $n \times n$

Στο (Orloff (1976)) οι ερευνητές διατυπώνουν το SD-VSP ως πρόβλημα ανάθεσης υπό περιορισμούς ημερομηνίας. Δυστυχώς, ενώ το λειτουργικό κόστος λαμβάνεται υπόψη σε αυτή την προσέγγιση, δεν μπορεί να μοντελοποιηθεί ένας σταθερός ή μέγιστος αριθμός οχημάτων.

### 2.1.3 Μοντέλο μεταφοράς

Η προσέγγιση του Μοντέλου Μεταφοράς δημοσιεύθηκε στο (Gavish and Shlifer (1979)). Συχνά αποκαλείται και ως μοντέλο Quasi-Assignment και διατυπώνεται ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Ομοίως με το Μοντέλο Ανάθεσης (Assignment Model) μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένας πίνακας όπου οι γραμμές αντιπροσωπεύουν τους σταθμούς και οι στήλες τον προορισμό, ενώ οι καταχωρήσεις υποδηλώνουν την ποσότητα, το κόστος ή την απόσταση για τα ταξίδια που πραγματοποιούνται από τους προαναφερθέντες σταθμούς προς τους προορισμούς, όπως φαίνεται παρακάτω:

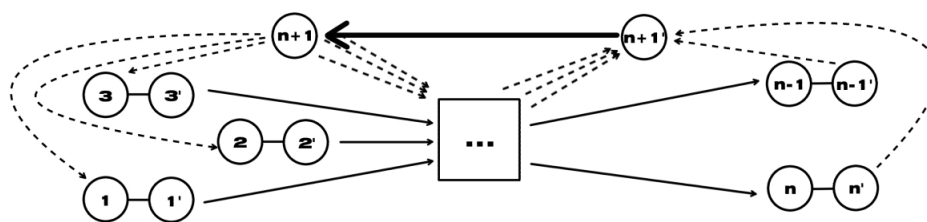
		<i>Destinations</i>						
		1	2	3	....	j	....	n
<i>Stations</i>	1	$X_{11}$	$X_{12}$	$X_{13}$	....	$X_{1j}$	....	$X_{1n}$
	2	$X_{21}$	$X_{22}$	$X_{23}$	....	$X_{2j}$	....	$X_{2n}$
	3	$X_{31}$	$X_{32}$	$X_{33}$	....	$X_{3j}$	....	$X_{3n}$
	i	$X_{i1}$	$X_{i2}$	$X_{i3}$	....	$X_{ij}$	....	$X_{in}$
	n	$X_{n1}$	$X_{n2}$	$X_{n3}$	....	$X_{nj}$	....	$X_{nn}$

Πίνακας 2.2: Πίνακας μοντέλου μεταφοράς  $n \times n$ 

Λόγω των μοναδικών χαρακτηριστικών του μοντέλου έχουν προσαρμοστεί στο πρόβλημα αυτό ειδικοί αλγόριθμοι ανάθεσης, όπως (Freling et al. (2001)).

#### 2.1.4 Μοντέλο ροής δικτύου

Το μοντέλο ροής δικτύου (Network Flow Model) μπορεί να διατυπωθεί και να επιλυθεί ως ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού. Αναπαρίσταται εύκολα με τη χρήση ενός κατευθυνόμενου γραφήματος (Directed Graph), όπως φαίνεται στο (2.1.1). Ο στόχος του μοντέλου είναι ο υπολογισμός της βέλτιστης ροής φορτίου μέσω του δικτύου με ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση του κόστους υπό τους συγκεκριμένους περιορισμούς του προβλήματος. Δεδομένης της φύσης τους μπορούν να επιλυθούν ταχύτερα με τη χρήση ειδικών αλγορίθμων δικτύου. Η προσέγγιση της ροής δικτύου που παρουσιάζεται (Bodin and Golden (1981)), παρακινήθηκε από την αρχική εργασία του Dantzig σχετικά με τον προγραμματισμό δεξαμενόπλοιων (Dantzig and Fulkerson (1954)). Από το σχήμα (2.1.1), κάθε ταξίδι αναπαρίσταται από δύο κόμβους (nodes) που συνδέονται μέσω ενός τόξου ταξιδιού (arcs). Τα τόξα αποθήκευσης (depot arcs) παρέχονται με λειτουργικό κόστος για την οδήγηση από/προς την αποθήκη. Το τόξο (arc) από τον κόμβο  $(n + 1)$  στον  $(n + 1)$  αντιπροσωπεύει μια πιθανή διαδρομή για ένα όχημα. Ο ελάχιστος αριθμός των διαθέσιμων οχημάτων μπορεί να οριστεί ως το κατώτερο όριο στο παρεχόμενο τόξο ροής (flow arc) και έτσι, θέτοντας το κατώτερο όριο ίσο με το ανώτερο όριο, μπορεί να μοντελοποιηθεί με επιτυχία ένας σταθερός αριθμός οχημάτων. Το τόξο ροής κυκλοφορίας για χωρητικότητα οχημάτων που παρουσιάζεται εδώ δημοσιεύθηκε από (Daduna and Pinto Paixão (1995)).



Σχήμα 2.1.1: Κατευθυνόμενο γράφημα μοντέλου ροής δικτύου (Network flow model directed graph)

Συνεχίζοντας, για τα MD-VSPs είναι δυνατόν να υπάρχουν πολλαπλές θέσεις εκκίνησης (origin depots) για τα δρομολόγια λεωφορείων. Επιπλέον, τα οχήματα πρέπει να επιστρέφουν στις αφετηρίες τους αφού ολοκληρώσουν τη διαδρομή τους. Το VSP πρέπει να επεκταθεί με παραμέτρους για να φιλοξενήσει τον πρόσθετο αριθμό αποθηκών. Παρακάτω παρουσιάζονται οι κύριες προσεγγίσεις μοντελοποίησης για το MD-VSP.

### 2.1.5 Μοντέλα ενός εμπορεύματος

Στα Μοντέλα ενός εμπορεύματος (Single Commodity Model) το MD-VSP μοντελοποιείται συνήθως σε ένα γράφημα με έναν κόμβο ανά ταξίδι και πρόσθετους κόμβους για τις αποθήκες ή τα οχήματα (ανάλογα με τις διάφορες περιπτώσεις). Ο στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους για τα στοιχειώδη κυκλώματα (elementary circuits), ενώ παράλληλα εξασφαλίζεται ότι κάθε κόμβος καλύπτεται από ακριβώς ένα κύκλωμα και αντίστοιχα κάθε κύκλωμα περιέχει ακριβώς έναν κόμβο αποθήκης ή οχήματος, ενώ παράλληλα τηρούνται τα όρια χωρητικότητας που τέθηκαν. Στο μέρος που ακολουθεί περιγράφονται συνοπτικά ορισμένες παραλλαγές των μοντέλων ενός εμπορεύματος.

#### 2.1.5.1 Μοντέλο ενός εμπορεύματος με περιορισμούς διακοπής υπο-διαδρομών

Αυτό το μοντέλο χρησιμοποιήθηκε στο (Carpaneto et al. (1989)) για να παρουσιαστεί ένας αλγόριθμος διακλάδωσης και οριοθέτησης (Branch and Bound Algorithm), καθιστώντας το πρώτο που έλυσε το MD-VSP με ακριβή τρόπο. Αυτή η έρευνητική εργασία κατασκευάζει ένα δίκτυο με έναν κόμβο που αντιστοιχεί σε κάθε διαθέσιμο όχημα ανά αποθήκη. Για κάθε έναν από αυτούς τους κόμβους κατασκευάζονται τόξα για και από κάθε κόμβο ταξιδιού πίσω στον προηγούμενο. Επιπλέον, προβλέπονται σταθερά κόστη για κάθε τόξο και τα λειτουργικά κόστη για τα νεκρά ταξίδια (deadhead trips), ενώ υπάρχουν και τόξα μηδενικού κόστους για την ανίχνευση αχρησιμοποίητων οχημάτων. Αυτό το δίκτυο έχει εξαιρετικά μεγάλο αριθμό στοιχείων λόγω της σχέσης των τόξων και των κόμβων με κάθε μεμονωμένο όχημα. Η αδυναμία αυτή επεκτείνεται και στους περιορισμούς εξάλειψης των υπο-δρομολογίων προκαλώντας εκθετική αύξηση του αριθμού τους.

### 2.1.5.2 Μοντέλο ενός εμπορεύματος με μεταβλητές ανάθεσης

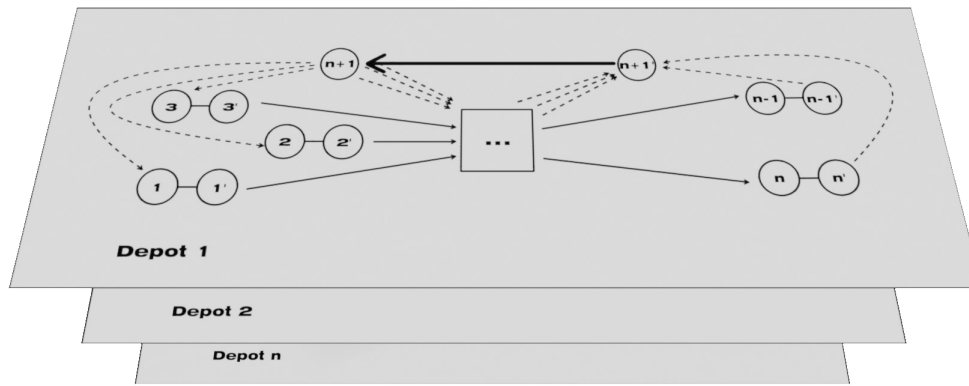
Μια διαφορετική προσέγγιση μοντέλου ενός εμπορεύματος (Single-commodity) παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τους (Mesquita and Paixão (1992)). Σε αυτό το μοντέλο οι κόμβοι των οχημάτων αντί να παρουσιάζονται μεμονωμένα συνδυάζονται σε έναν ενιαίο κόμβο για κάθε αποθήκη. Ο περιορισμός που εισάγεται διασφαλίζει ότι κάθε επιβάτης ανατίθεται σε ένα μόνο όχημα, ενώ παράλληλα βελτιστοποιείται η διανυόμενη απόσταση του οχήματος. Επιπροσθέτως, μπορούν να προστεθούν νέες μεταβλητές για την ανάθεση των ταξιδιών στις αποθήκες (depots), μειώνοντας περαιτέρω την πολυπλοκότητα του δικτύου.

### 2.1.6 Μοντέλα πολλαπλών εμπορευμάτων

Οι διατυπώσεις πολλαπλών εμπορευμάτων (Multi-commodity models) αποτελούν επεκτάσεις της προσέγγισης ροής δικτύου που περιγράφηκε προηγουμένως στα μοντέλα SD-VSP. Σε αντίθεση με τα μοντέλα ενός εμπορεύματος (Single-Commodity Models), εδώ κατασκευάζονται πολλαπλά ανεξάρτητα δίκτυα. Συγκεκριμένα ένα για κάθε αποθήκη (depot) και στη συνέχεια συνδυάζονται για να δημιουργήσουν ένα πολυ-γράφημα (multi-graph) για το μοντέλο πολλαπλών εμπορευμάτων (Multi-commodity models). Παρακάτω παρουσιάζονται δύο διαφορετικές προσεγγίσεις.

#### 2.1.6.1 Μοντέλα βασισμένα σε συνδέσεις

Στο μοντέλο με βάση τη σύνδεση (Connection-based Model), οι συνδέσεις μεταξύ των διαδρομών κατασκευάζονται λαμβάνοντας υπόψη τη συμβατότητα με όλες τις πιθανές διαδρομές. Για κάθε σύνδεση εισάγεται ένα τόξο στο δίκτυο. Το πλήθος των τόξων σύνδεσης αυξάνεται ανάλογα με το τετράγωνο του πληθους των ταξιδιών. Τα υποδίκτυα (sub-networks) δημιουργούνται με τον ίδιο τρόπο όπως στο μοντέλο ροής δικτύου για τα SD-VSPs. Ένα παράδειγμα παρουσιάζεται στο σχήμα (2.1.2). Ομοίως με το μοντέλο ροής δικτύου, οι περιορισμοί διατήρησης ροής εισάγονται για κάθε κόμβο του γραφήματος. Αλλά σε αντίθεση με το SD-VSP κάθε ταξίδι στο μοντέλο σχετίζεται με περισσότερα από ένα τόξα, απαιτούνται νέοι περιορισμοί, συχνά αποκαλούμενοι περιορισμοί κάλυψης (cover constraints), προκειμένου να εξασφαλιστεί η εξυπηρέτηση όλων των ταξιδιών. Η προσθήκη των νέων περιορισμών εξασφαλίζει την εξυπηρέτηση όλων των ταξιδιών στην εφικτή λύση, επιτρέποντας την επιλογή ακριβώς ενός τόξου από το σύνολο των τόξων ταξιδιού ενός ειδικού ταξιδιού. Τέλος, οι χωρητικότητες των αποθηκών μπορούν να εξεταστούν θέτοντας ένα ανώτερο όριο για το τόξο ροής κυκλοφορίας μιας αποθήκης. Ένα παράδειγμα μπορεί να παρατηρηθεί εδώ (Bertossi et al. (1987)) στο οποίο οι ερευνητές χρησιμοποιούν αυτή την προσέγγιση. Μια διατύπωση ανάθεσης επεκτείνεται στο μοντέλο πολλαπλών εμπορευμάτων και επιλύεται ευρετικά μέσω της μεθόδου χαλαρώσεως κατά Lagrange (Lagrangian relaxation) των προαναφερθέντων περιορισμών σε συνδυασμό με μια διαδικασία επιδιόρθωσης.



Σχήμα 2.1.2: Γράφημα μοντέλου βασισμένο σε συνδέσεις

### 2.1.6.2 Μοντέλα Χωροχρονικών Δικτύων

Η διατύπωση πολλαπλών εμπορευμάτων με διαφορετική υποκείμενη δομή δικτύου δημοσιεύθηκε στα (Kliwer et al. (2002)) και (Kliwer et al. (2006)). Κατασκευάζεται ένα δίκτυο χώρου-χρόνου στο οποίο συνδυάζονται οι πιθανές συνδέσεις μεταξύ ομάδων συμβατών ταξιδιών. Έτσι, ο αριθμός των τόξων συμβατότητας στο δίκτυο μειώνεται δραστικά σε σύγκριση με το προαναφερθέν μοντέλο χωρίς να χάνονται βιώσιμα δεδομένα προγραμματισμού.

### 2.1.7 Μοντέλα διαμερισμού συνόλων

Η ιδέα των μοντέλων κατάτμησης συνόλου (Set Partitioning Model) είναι η συγκέντρωση όλων των εφικτών δρομολογίων για τα οχήματα και η επιλογή μιας ομάδας από αυτά που πληροί όλους τους περιορισμούς του. Η πρώτη προσέγγιση μοντέλου κατάτμησης συνόλου δημοσιεύτηκε στο (Ribeiro and Soumis (1994)) με έναν αλγόριθμο δημιουργίας στηλών (column generation algorithm). Αυτό το μοντέλο μπορεί να επιτευχθεί με την εφαρμογή της διάσπασης (decomposition) Dantzig-Wolfe στο μοντέλο πολλαπλών εμπορευμάτων που παρουσιάστηκε στο (Hadjar and Soumis (2009)), έτσι ώστε να χρησιμοποιείται η ίδια υποκείμενη δομή γραφήματος όπως στο (2.1.2). Το μαθηματικό μοντέλο που επιτυγχάνεται, το οποίο έχει λίγους μόνο περιορισμούς αλλά μεγάλο αριθμό μεταβλητών αφού όλες οι πιθανές διαδρομές μέσω του δικτύου για κάθε αποθήκη είναι μια μεταβλητή στο μοντέλο, θεωρείται ένα πρόβλημα διαμέρισης συνόλου.

## 2.2 Χρονοπρογραμματισμός οχημάτων για ηλεκτρικά λεωφορεία

Ενώ τα ηλεκτρικά λεωφορεία έχουν ενεργειακά, περιβαλλοντικά και οικονομικά οφέλη για την κοινωνία, απαιτούν πρόσθετα βήματα βελτιστοποίησης στο μοντέλο επιλογής. Όλα τα παραπάνω μοντέλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν στον προγραμματισμό των ηλεκτρικών οχημάτων, αλλά εισάγονται νέοι περιορισμοί που περιπλέκουν περαιτέρω τη διαδικασία προγραμματισμού. Πρώτον, η περιορισμένη αυτονομία τους απαιτεί την ανάγκη να ληφθούν υπόψη πιο σύνθετες

αντικειμενικές συναρτήσεις. Πρέπει επίσης να ληφθούν υπόψη οι αποφάσεις επαναφόρτισης. Οι μέθοδοι και οι αλγόριθμοι με τους οποίους αντιμετωπίζεται η φόρτιση και η υποδομή δεν θα συζητηθούν σε αυτή την εργασία. Η εστίαση θα παραμείνει στο E-VSP.

Ως επέκταση του μοντέλου ροής για μη ηλεκτρικά λεωφορεία που αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, στο (Li (2014)) οι ερευνητές παρουσιάζουν ένα μοντέλο ροής με περιορισμούς big-M προκειμένου να ληφθεί υπόψη η μέγιστη απόσταση των οχημάτων πριν από τη φόρτιση. Διερευνάται η λύση μίας αποθήκης με ανταλλαγή μπαταριών (Battery Swapping) ή γρήγορη φόρτιση σε συγκεκριμένους σταθμούς μπαταριών. Το πρόβλημα επιλύεται τελικά με τη χρήση ενός εμπορικού επιλυτή MIP. Το πρόβλημα αναδιατυπώνεται επίσης ως μοντέλο προβλήματος κατάτμησης συνόλου που επιλύεται με τη μέθοδο δημιουργίας στηλών και χρησιμοποιείται μια στρατηγική καθορισμού μεταβλητών για την εύρεση ακέραιων λύσεων. Χρησιμοποιώντας τους περιορισμούς επαναφόρτισης ως υποπρόβλημα της μεθόδου δημιουργίας στηλών, μοντελοποιείται και επιλύεται ένα πρόβλημα συντομότερης διαδρομής με περιορισμούς πόρων χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση δυναμικού προγραμματισμού. Τέλος, οι ερευνητές συγκρίνουν τα αποτελέσματα των 2 μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων τους.

Επιπλέον, στο (Rogge et al. (2018)) εξετάζονται ηλεκτρικά οχήματα διαφορετικής χωρητικότητας με μεταβλητή κατανάλωση ενέργειας. Με στόχο την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους ιδιοκτησίας του ηλεκτρικού στόλου, ερευνάται μια στρατηγική λύση για την εξυπηρέτηση όλων των διαδρομών με ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση του αριθμού των απαιτούμενων οχημάτων. Για την επίλυση του προβλήματος προτείνεται από τους ερευνητές ένας γενετικός αλγόριθμος (genetic algorithm) σε συνδυασμό με τη διατύπωση ενός μικτού ακέραιου προβλήματος (Mixed Integer Linear Programming - MILP).

Μια ολοκληρωμένη προσέγγιση παρουσιάζεται επίσης στο (Teng et al. (2020)) για μια γραμμή ηλεκτρικών λεωφορείων. Κατασκευάζεται ένα μοντέλο βελτιστοποίησης πολλαπλών στόχων προκειμένου να εξομαλυνθούν τα διαστήματα αναχώρησης των οχημάτων και να μειωθούν αποτελεσματικά οι χρόνοι αναμονής, ενώ παράλληλα ελαχιστοποιείται ο αριθμός των οχημάτων και το κόστος φόρτισης. Οι ερευνητές συγκρίνουν τα υπάρχοντα υλοποιημένα δρομολόγια ενός πραγματικού παραδείγματος από τη Σαγκάη που περιέχουν 84 διαδρομές με τον πολυ-αντικειμενικό αλγόριθμο βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων (multi-objective particle swarm optimization algorithm) τους. Τα αποτελέσματα δείχνουν μείωση του αριθμού των οχημάτων και ομαλότερα διαστήματα αναχώρησης, ενώ παράλληλα επιτρέπουν την ομοιόμορφη κατανομή των περιόδων φόρτισης των οχημάτων τις ώρες εκτός αιχμής.

Στο (Wen et al. (2016)), ένα σύνολο δρομολογημένων διαδρομών με λεωφορεία, κάθε μία από τις οποίες ξεκινά και καταλήγει σε συγκεκριμένες τοποθεσίες και σε συγκεκριμένες ώρες, εκτελούνται από ένα σύνολο ηλεκτρικών λεωφορείων ή οχημάτων που εδρεύουν σε έναν αριθμό αμαξοστασίων (depots) με περιορισμένη εμβέλεια οδήγησης. Τα ηλεκτρικά οχήματα επιτρέπεται να επαναφορτίζονται πλήρως ή μερικώς σε οποιονδήποτε από τους συγκεκριμένους σταθμούς επαναφόρτισης. Ο στόχος είναι πρώτον να ελαχιστοποιηθεί ο αριθμός των οχημάτων που απαιτούνται για την κάλυψη όλων των προγραμματισμένων δρομολογίων, και δεύτερον να ελαχιστοποιηθεί η συνολική απόσταση ταξιδιού, η οποία ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση της συνολικής απόστασης νεκρής διαδρομής. Παρουσιάζεται μια διατύπωση μεικτού ακέραιου προγραμματισμού (MILP) καθώς και μια ευρετική μέθοδος (heuristic method) Adaptive Large

Neighborhood Search (ALNS) για το E-VSP. Η μέθοδος δοκιμάζεται σε περιπτώσεις με έως και 500 ταξίδια, οκτώ αποθήκες και 16 σταθμούς. Τέλος, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η προτεινόμενη ευρετική μπορεί να παρέχει καλές λύσεις σε μεγάλες περιπτώσεις E-VSP και βέλτιστες ή σχεδόν βέλτιστες λύσεις σε μικρές περιπτώσεις E-VSP.

Ένα bi-objective μοντέλο MIP για το E-VSP παρουσιάζεται στο (Liu and (Avi) Ceder (2020)). Ο πρώτος στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού αριθμού των απαιτούμενων ηλεκτρικών οχημάτων και ο δεύτερος στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του αριθμού των απαιτούμενων φορτιστών. Η χωρητικότητα της μπαταρίας των λεωφορείων είναι 100 κιλοβατώρες. Οι φορτιστές βρίσκονται στους τερματικούς σταθμούς και η ισχύς φόρτισης θεωρείται ότι είναι 50kW. Οι ερευνητές χρησιμοποιούν στρατηγικές πλήρους και μερικής φόρτισης και θεωρούν μη γραμμική συμπεριφορά φόρτισης της μπαταρίας. Για την επίλυση της αναπτύσσονται δύο μέθοδοι επίλυσης. Πρώτον, προτείνεται μια διαδικασία επίλυσης με βάση τη λεξικογραφική μέθοδο σε δύο στάδια κατασκευής και βελτιστοποίησης (lexicographic method-based two-stage construction-and-optimization solution procedure). Δεύτερον, αναπτύσσεται μια προσαρμοσμένη μέθοδος επίλυσης μέγιστης ροής (adjusted max-flow solution method). Τα αποτελέσματα καταδεικνύουν ότι τα προτεινόμενα μοντέλα μαθηματικού προγραμματισμού και οι μέθοδοι επίλυσης είναι αποτελεσματικά και έχουν τη δυνατότητα να εφαρμοστούν στην επίλυση μεγάλης κλίμακας πραγματικών E-VSP.

(Li et al. (2019)) παρουσιάζει το MD-VSP με πολλαπλούς τύπους οχημάτων, συμπεριλαμβανομένων των ηλεκτρικών οχημάτων υπό περιορισμούς εμβέλειας και ανεφοδιασμού. Οι ερευνητές δημιουργούν ένα δίκτυο χώρου-χρόνου-ενέργειας για τη ροή λεωφορείων και ένα δίκτυο χώρου-χρόνου για τη ροή επιβατών. Το πρόβλημα διατυπώνεται ως μοντέλο MIP. Οι ερευνητές εισάγουν το εξωτερικό κόστος που σχετίζεται με τις εκπομπές και διερευνούν το ελάχιστο συνολικό κόστος του συστήματος για τους φορείς εκμετάλλευσης και τους επιβάτες με τον προγραμματισμό του στόλου των λεωφορείων και την τοποθέτηση των σταθμών ανεφοδιασμού. Η χωρητικότητα των ηλεκτρικών λεωφορείων ορίζεται σε 230 κιλοβατώρες και ο ρυθμός κατανάλωσης ενέργειας είναι 1,2 κιλοβατώρες/χιλιόμετρο. Ο χρόνος επαναφόρτισης είναι 30 λεπτά. Το μοντέλο δοκιμάζεται σε πραγματικά παραδείγματα από το Χονγκ Κονγκ που περιέχουν 288 διαδρομές και 2 αποθήκες. Για την επίλυση του E-VSP χρησιμοποιείται ένας γενικός αλγόριθμος. Η αντικειμενική συνάρτηση αποτελείται από το κόστος αγοράς των ηλεκτρικών λεωφορείων, το κόστος αγοράς και εγκατάστασης της υποδομής φόρτισης και το ημερήσιο κόστος κενής οδήγησης των λεωφορείων. Η προτεινόμενη μέθοδος δοκιμάζεται σε μια περίπτωση από το Πεκίνο που περιέχει 544 διαδρομές.

Στο (van Kooten Niekerk et al. (2017)) λαμβάνεται υπόψη η τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας λόγω της μεταβλητότητάς της ανάλογα με το χρόνο λήψης από το δίκτυο. Οι σταθμοί φόρτισης και η χωρητικότητά τους λαμβάνονται επίσης υπόψη. Τα ηλεκτρικά λεωφορεία έχουν χωρητικότητα μπαταρίας 244 κιλοβατώρες και κατανάλωση ενέργειας 1,2 κιλοβατώρες ανά χιλιόμετρο. Η ταχύτητα φόρτισης θεωρείται ότι είναι 2,0 κιλοβατώρες ανά λεπτό. Για την επίλυση του E-VSP εφαρμόζονται δύο μοντέλα. Το πρώτο μοντέλο είναι ένα μοντέλο MIP με συνεχείς μεταβλητές για τη φόρτιση της μπαταρίας. Το δεύτερο μοντέλο επιτρέπει τη μη γραμμική συμπεριφορά φόρτισης των μπαταριών και λαμβάνει υπόψη τις πραγματικές τιμές ηλεκτρικής ενέργειας κατά τη διάρκεια της ημέρας. Το τελικό βελτιωμένο μοντέλο μπορεί να επιλυθεί με τη χρήση

ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού για περιπτώσεις μικρού/μεσαίου μεγέθους και, ως εκ τούτου, περιγράφονται δύο άλλες μέθοδοι επίλυσης που βασίζονται στη δημιουργία στηλών (column generation) για μεγάλες περιπτώσεις.

Στο (Desaulniers et al. (2016)) παρουσιάζεται ένας ακριβής αλγόριθμος branch-price-and-cut που βασίζεται σε προσαρμοσμένους αλγορίθμους μονοκατευθυντικής και αμφίδρομης επισήμανσης (customized mono-directional and bi-directional labeling) για τη δημιουργία εφικτών διαδρομών οχημάτων, προκειμένου να επιλυθούν πολλαπλές παραλλαγές ενός προβλήματος δρομολόγησης ηλεκτρικών οχημάτων με χρονικά παράθυρα. Η χρήση συναρτήσεων επέκτασης πηγής (REF) στις υπολογιστικές μελέτες αναδεικνύει την υπεροχή των αλγορίθμων αμφίδρομης επισήμανσης σε σύγκριση με τον μονοκατευθυντικό και τα πλεονεκτήματα της δυνατότητας πολλαπλών μερικών επαναφορτίσεων για τη μείωση του κόστους δρομολόγησης και του αριθμού των απασχολούμενων οχημάτων.

## 2.3 Χρονοπρογραμματισμός οχημάτων για αποσπώμενα λεωφορεία

Τα αποσπώμενα οχήματα, όπως έχει ήδη αναφερθεί, μπορούν να προσφέρουν επιπλέον οφέλη στην αποδοτικότητα ενός στόλου ηλεκτρικών οχημάτων. Ο καινοτόμος χαρακτήρας τους τα καθιστά εξαιρετικές προσθήκες σε στόλους λεωφορείων προκειμένου να παρέχουν ευελιξία. Είναι σημαντικό να καταλάβουμε τους σωστούς περιορισμούς για τη μέθοδο που χρησιμοποιείται και επίσης να υπάρχει η κατάλληλη υποδομή για να πραγματοποιηθούν οι κατάλληλες προσαρμογές των συνδυασμένων οχημάτων.

Ένα τρισδιάστατο μακροσκοπικό θεμελιώδες διάγραμμα (three-dimensional macroscopic fundamental diagram) χρησιμοποιείται για πρώτη φορά στο (Dakic et al. (2021)) κατά την ανάπτυξη του μοντέλου βελτιστοποίησης για να ληφθούν υπόψη πολύπλοκες αλληλεπιδράσεις και κυκλοφοριακή συμφόρηση, για αποσπώμενα οχήματα. Το μοντέλο κατασκευάζεται λαμβάνοντας υπόψη τις αποσπώμενες μονάδες λεωφορείων, ενώ παράλληλα παρουσιάζονται τα πλεονεκτήματα της τεχνολογίας. Αναλύοντας διάφορα σενάρια ζήτησης οχημάτων και επιβατών και ποσοστά διείσδυσης αποσπώμενων μονάδων λεωφορείων, οι ερευνητές καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι το προτεινόμενο σύστημα μπορεί να υπερτερεί σημαντικά έναντι των συμβατικών συστημάτων δρομολόγησης λεωφορείων. Τα αποτελέσματα αυτά επιτυγχάνονται παρέχοντας προσαρμοστικότητα στον αριθμό των συνδυασμένων αποσπώμενων μονάδων λεωφορείων και στις συχνότητες αποστολής τους σύμφωνα με τις απαιτήσεις οχημάτων και επιβατών.

Επιπλέον, η προσθήκη αποσπώμενων οχημάτων σε ένα προσαρμοσμένο σύστημα λεωφορείων αναλύεται στο (Gong et al. (2021)). Η ταυτόχρονη ενσωμάτωση της ανάθεσης δρομολογίων επιβατών και των αποσπώμενων οχημάτων που επιλύεται με τη χρήση ενός μη γραμμικού μοντέλου μεικτής ακέραιης βελτιστοποίησης, παρέχει ένα πιο αποδοτικό από άποψη κόστους προσαρμοσμένο δίκτυο λεωφορείων με υπηρεσίες υψηλότερης ποιότητας. Η ευρετική μέθοδος που βασίζεται στη βελτιστοποίηση σμήνους σωματιδίων παρέχει υψηλής ποιότητας σχεδόν βέλτιστες λύσεις σε αποτελεσματική σύγκριση με έναν σύγχρονο εμπορικό επιλυτή, το CPLEX, για πολλά διαφορετικά σενάρια. Δεδομένου όμως ότι τα δρομολόγια είναι εκ των προτέρων γνωστά, αυτό εισάγει τον κρίσιμο περιορισμό της μη αποτύπωσης της αλληλεξάρτησης μεταξύ των απαιτήσεων



των επιβατών σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.

Στο (Ji et al. (2021)) προτείνεται ένα σύστημα αποσπώμενων αυτόνομων οχημάτων προκειμένου να παρέχει μεγαλύτερη ευελιξία στην αντιμετώπιση των χρονικών διακυμάνσεων των απαιτήσεων των επιβατών. Διατυπώνεται ένα μοντέλο βελτιστοποίησης διπλού σκοπού (bi-objective) που λαμβάνει υπόψη τη χρησιμοποίηση των οχημάτων και την ποιότητα των υπηρεσιών. Η μέθοδος e-constraint υιοθετείται για την επίλυση του μοντέλου που αναπτύχθηκε και η ασαφής ικανοποιητική προσέγγιση (fuzzy satisfying approach) χρησιμοποιείται για την επιλογή της καλύτερης δυνατής λύσης. Υιοθετείται ένα δίκτυο χώρου-χρόνου για την αναπαράσταση των διαδικασιών προγραμματισμού δρομολογίων και ανάθεσης μονάδων. Τα αποτελέσματα της προτεινόμενης στρατηγικής ξεπερνούν την κοινή πρόκληση στον προγραμματισμό δρομολογίων λεωφορείων μεγάλης χωρητικότητας με χρονικά μεταβαλλόμενη ζήτηση επιβατών. Αυτό οδηγεί αποτελεσματικά σε μείωση των κενών θέσεων, ενώ παράλληλα μειώνει τους χρόνους αναμονής των επιβατών.

Τέλος, στο (Guo et al. (2023)) οι ερευνητές προτείνουν μια διαδικασία βελτιστοποίησης σε δύο φάσεις για την δείξουν τις πλήρεις δυνατότητες των αποσπώμενων αυτόνομων ηλεκτρικών οχημάτων (MAEVs) με την αξιοποίηση των πλεονεκτημάτων τους. Στην πρώτη φάση, κατασκευάζεται ένα μοντέλο μικτού ακέραιου προγραμματισμού (MIP). Επιλύεται αποτελεσματικά με τη χρήση ενός προτεινόμενου αλγορίθμου χαλάρωσης Λαγκράντζ (Lagrange relaxation). Στη δεύτερη φάση, σχεδιάζονται τρεις στρατηγικές κατανομής και βελτιστοποιούνται με μια δυναμική διαδικασία κατανομής (dynamic dispatching procedure) για τη σωστή προσαρμογή των MAEVs. Τέλος, πραγματοποιείται μελέτη περίπτωσης σε μια μεγάλη αστική περιοχή του Πεκίνου στην Κίνα, η οποία αποδεικνύει την υψηλή αποτελεσματικότητα της υιοθέτησης των MAEVs όσον αφορά τη χρήση των πόρων και τη φιλικότητα προς το περιβάλλον.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται μια σύνοψη μελετών προγραμματισμού ηλεκτρικών οχημάτων και ορισμένα σημαντικά χαρακτηριστικά τους.

Studies on electric vehicles			
Study	Problem	Formulation	Solution Method
Li (2014)	Vehicle Scheduling for electric buses with battery swapping or fast charging	Mixed integer programming	Branch and cut, Column Generation Truncated column generation algorithm
Rogge et al. (2018)	Cost-optimized planning of depot charging battery bus fleets and charging infrastructure	Mixed integer programming	Genetic algorithm
Teng et al. (2020)	Timetable and vehicle scheduling optimization	Multiobjective programming model	Multiobjective particle swarm optimization algorithm
Wen et al. (2016)	Mixed integer programming	Integer linear programming	Adaptive large neighborhood search (ALNS) heuristic
Liu and (Avi) Ceder (2020)	Battery-electric transit vehicle scheduling problem with stationary battery chargers	Deficit function theory Bi-objective integer programming	Max-flow solution method Lexicographic two-stage construction and-optimization
Li et al. (2019)	Routing optimization for a mixed fleet of electric commercial vehicles	Integer linear programming	Time-space-energy (TSE) network
van Kooten Niekerk et al. (2017)	Efficient charge scheduling for electric vehicles	bi-objective optimization model	Mixed integer programming, Column generation
Desaulniers et al. (2016)	Effective route planning for battery electric commercial vehicle	Set-partitioning model	Branch-price-and-cut customized mono-directional, bidirectional labeling
Guo et al. (2023)	Adoption of modular autonomous electric vehicles	Mixed integer programming model	Lagrangian relaxation algorithm

Πίνακας 2.3: Σύνοψη μελετών προγραμματισμού ηλεκτρικών οχημάτων.

# Κεφάλαιο 3

## Διατύπωση μοντέλου

---

<b>3.1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>18</b>
<b>3.2</b>	<b>Σύνολα</b>	<b>22</b>
<b>3.3</b>	<b>Παράμετροι</b>	<b>23</b>
<b>3.4</b>	<b>Μεταβλητές</b>	<b>24</b>
<b>3.5</b>	<b>Περιορισμοί</b>	<b>24</b>
3.5.1	Περιορισμοί προγραμματισμού οχημάτων	25
3.5.2	Περιορισμοί ηλεκτρικής φόρτισης	26
3.5.3	Περιορισμοί αποσπώμενων μονάδων	27
<b>3.6</b>	<b>Αντικειμενική συνάρτηση</b>	<b>27</b>
<b>3.7</b>	<b>Γραμμική μετατροπή του EB-MDVSPTW με αποσπώμενα λεωφορεία</b>	<b>28</b>
<b>3.8</b>	<b>Έγκυρες ανισότητες</b>	<b>34</b>
3.8.1	Αναγωγές συνόλων τόξων	35
3.8.2	Αναγωγές SOC	35
3.8.3	Μειώσεις γεγονότων φόρτισης	36
3.8.4	Μειώσεις του χρόνου έναρξης των υπηρεσιών	36
3.8.5	Αντιφατικές αναγωγές τόξων	37
3.8.5.1	Ορισμός	37

---

### 3.1 Εισαγωγή

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζουμε τους στόχους και τους περιορισμούς μας για το προτεινόμενο μοντέλο. Πρώτον, για τον προγραμματισμό των ηλεκτρικών οχημάτων, η κύρια διαφορά σε σύγκριση με τον προγραμματισμό των μη ηλεκτρικών οχημάτων συνίσταται στη διαδικασία επαναφόρτισης του οχήματος. Είτε αυτή πραγματοποιείται με πραγματική φόρτιση είτε με ανταλλαγή μπαταριών, συνήθως απαιτεί την επιστροφή του οχήματος στην αποθήκη που του έχει ανατεθεί και την απουσία του για ορισμένο χρονικό διάστημα από την εκτέλεση δρομολογίων μεταξύ σταθμών. Ενώ ο στόχος μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε το συνολικό κόστος του συστήματός μας, αυτό μπορεί να είναι δύσκολο, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι τιμές της ηλεκτρικής ενέργειας μπορεί να αυξομειώνονται κατά τη διάρκεια των περιόδων φόρτισης. Εδώ, η εισαγωγή προσαρμοσμένων λεωφορείων μπορεί να συμβάλει στη μείωση αυτής της αβεβαιότητας συνδυάζοντας τις μονάδες λεωφορείων προκειμένου να παρακάμπτουν τα γεγονότα φόρτισης και να καλύπτουν επίσης τη ζήτηση επιβατών κατά τις ώρες αιχμής. Αυτή η ενίσχυση της χωρητικότητας των οχημάτων επιτρέπει στο δίκτυο να ανταποκριθεί στην αυξημένη ζήτηση χωρίς να αυξηθεί δραματικά η συχνότητα αποστολής και βοηθώντας έτσι στην ελαχιστοποίηση του αριθμού των απαιτούμενων οχημάτων.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, στόχος μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε το συνολικό κόστος του συστήματος και τον αριθμό των ηλεκτρικών λεωφορείων που απαιτούνται. Δεδομένου ότι η φόρτιση πραγματοποιείται μόνο στις αποθήκες, τα οχήματα πρέπει να ελέγχουν πριν από κάθε ταξίδι αν η διαθέσιμη ωφέλιμη χωρητικότητα της μπαταρίας μπορεί να καλύψει το ταξίδι από το σταθμό  $i$  στο σταθμό  $j$  και επίσης το ταξίδι από το σταθμό  $j$  στην αποθήκη  $k$ . Αν η διαθέσιμη ωφέλιμη χωρητικότητα της μπαταρίας είναι επαρκής, το ταξίδι εκτελείται. Εάν όχι, το όχημα επιστρέφει στην αρχική του αποθήκη για να πραγματοποιηθεί το συμβάν φόρτισης. Πρέπει να εισαχθούν πρόσθετοι περιορισμοί για να εξασφαλιστεί η ομαλή ροή οχημάτων από την αποθήκη. Κατά τη διάρκεια των ωρών αιχμής μπορεί να απαγορεύεται η φόρτιση. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί θέτοντας το κόστος φόρτισης ως πολύ μεγάλο θετικό αριθμό. Τα οχήματα αυτά μπορούν στη συνέχεια να συνδυαστούν για να αυξηθεί η χωρητικότητα των λειτουργικών οχημάτων. Τέλος, θα πρέπει να ληφθούν υπόψη ορισμένοι χρόνοι καθυστέρησης προκειμένου να ληφθεί υπόψη η κυκλοφοριακή συμφόρηση.

Έχοντας ως βάση την έρευνα των (Gkiotsalitis et al. (2023)), επεκτείνουμε το Πρόβλημα Προγραμματισμού Οχημάτων Ηλεκτρικών Λεωφορείων με Πολλαπλές Αποθήκες με Χρονικά Παράθυρα (EB-MDVSP<sub>TW</sub>) για να συμπεριλάβουμε την τεχνολογία αποσπώμενων λεωφορείων. Οι προσθήκες της προτεινόμενης διατύπωσης αποτελούνται από μια αποθήκη, στην οποία αποθηκεύονται οι αποσπώμενες μονάδες. Σε κάθε προγραμματισμένο ταξίδι ανατίθεται ένας συγκεκριμένος αριθμός αποσπώμενων μονάδων που πρέπει να προσαρτηθούν σε ένα λεωφορείο προκειμένου να πραγματοποιηθεί το ταξίδι. Εξακολουθούμε να αναζητούμε την ακριβή κάλυψη με ελάχιστο κόστος όλων των προγραμματισμένων δρομολογίων κατά τη διάρκεια της καθημερινής λειτουργίας, λαμβάνοντας υπόψη το πρόσθετο χαρακτηριστικό των αποσπώμενων λεωφορείων. Εισάγουμε ένα νέο σύνολο που αποτελείται από όλες τις εργασίες σύζευξης/αποσύζευξης που θα μοντελοποιηθούν ως κόμβοι στις αναπαραστάσεις του δικτύου. Αυτά λαμβάνονται επίσης υπόψη και στα δύο σύνολα  $N^k$ ,  $N$  ενώ παράλληλα δημιουργούνται επιπλέον τόξα για το σύνολο  $A^k$ . Όλα αυτά καταλήγουν σε ένα διευρυμένο δίκτυο  $G^k$ . Επιπλέον,

προστίθεται μια παράμετρος  $w_j$  για  $j \in V$ , όπου κάθε ταξίδι  $j$  συνδέεται με τις μονάδες που απαιτούνται για την ολοκλήρωσή του. Αυτό είναι προκαθορισμένο με βάση τις ανάγκες ζήτησης επιβατών.

Προκειμένου να ληφθούν υπόψη οι πρόσθετες εργασίες, το σύνολο των τόξων  $A^k$  πρέπει να επεκταθεί ώστε να ληφθούν υπόψη όλες οι πρόσθετες διελεύσεις οχημάτων μεταξύ των διαδρομών, των συμβάντων φόρτισης και των προστιθέμενων συμβάντων σύζευξης/αποσύζευξης. Διαμορφώνεται ως εξής:

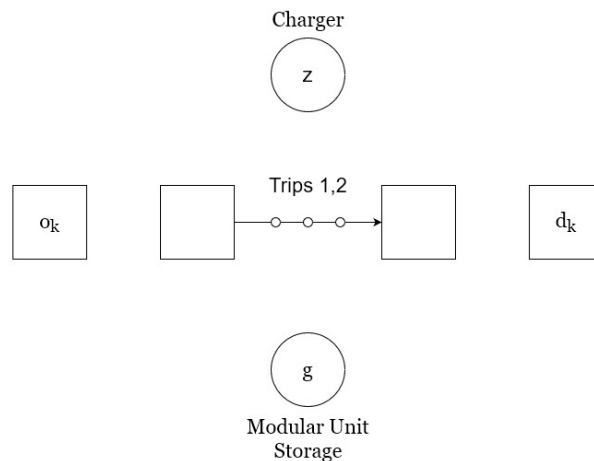
$$A_k = \begin{cases} A_1^k = (o_k, j) & \forall j \in N^k - \{o_k\} \\ A_2^k = (j, d_k) & \forall j \in N^k - \{o_k, d_k\} \\ A_3^k = (i, j) & \forall i \in V^k, \forall j \in V_k - \{i\} \\ A_4^k = (i, j) & \forall i \in V^k, \forall j \in F \\ A_5^k = (i, j) & \forall i \in F, \forall j \in V^k \\ A_6^k = (i, j) & \forall i \in V^k, \forall j \in H \\ A_7^k = (i, j) & \forall i \in H, \forall j \in V^k \\ A_8^k = (i, j) & \forall i \in F, \forall j \in H \\ A_9^k = (i, j) & \forall i \in H, \forall j \in F \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, τα τόξα από  $A_1^k$  έως  $A_5^k$  υπάρχουν ήδη στην αρχική μελέτη. Για το όχημα  $k \in K$ , τα τόξα  $A_1^k$  είναι όλα τα εφικτά τόξα που ξεκινούν από την αποθήκη προέλευσης,  $A_2^k$  είναι όλα τα εφικτά τόξα που συνδέουν έναν κόμβο με την αποθήκη προορισμού,  $A_3^k$  είναι όλα τα εφικτά τόξα που αντιπροσωπεύουν το ταξίδι από τη θέση τέλους του ταξιδιού  $i \in V^k$  στη θέση έναρξης του ταξιδιού  $j \in V_k - \{i\}$ ,  $A_4^k$  είναι όλα τα εφικτά τόξα που αντιπροσωπεύουν το ταξίδι από τη θέση τέλους του ταξιδιού  $i \in V^k$  στη θέση του γεγονότος φόρτισης  $j \in F$ , και τα τόξα  $A_{5k}$  είναι όλα τα εφικτά τόξα που αντιπροσωπεύουν το ταξίδι από τη θέση του γεγονότος φόρτισης  $i \in F$  στη θέση έναρξης του ταξιδιού  $j \in V^k$ . Τώρα για τα νεοεισαχθέντα τόξα.  $A_6^k$  είναι όλα τα εφικτά τόξα που αντιπροσωπεύουν το ταξίδι από τη θέση τέλους του ταξιδιού  $i \in V^k$  στην αρχή της εργασίας σύζευξης/αποσύζευξης  $j \in H$ ,  $A_7^k$  είναι όλα τα εφικτά τόξα που αντιπροσωπεύουν το ταξίδι από τη θέση της εργασίας σύζευξης/αποσύζευξης  $i \in H$  στην αρχή του ταξιδιού  $j \in V^k$ ,  $A_8^k$  είναι όλα τα εφικτά τόξα που αντιπροσωπεύουν το ταξίδι από τη θέση του γεγονότος φόρτισης  $i \in F$  στη θέση έναρξης του έργου σύζευξης/αποσύζευξης  $j \in H$ , και τέλος το τόξο  $A_9^k$  είναι όλα τα εφικτά τόξα που αντιπροσωπεύουν το ταξίδι από τη θέση του έργου σύζευξης/αποσύζευξης  $i \in H$  στη θέση έναρξης του γεγονότος φόρτισης  $j \in F$ .

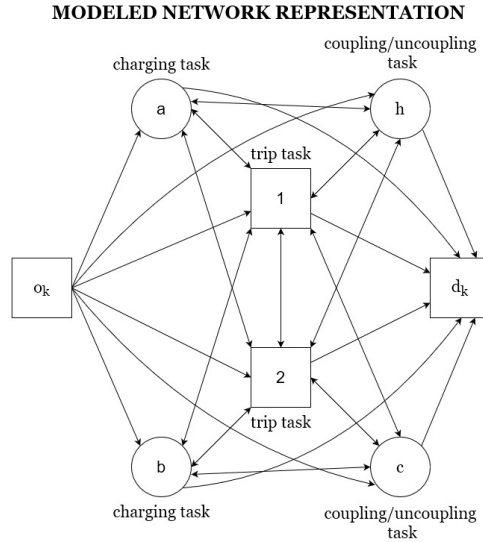
Η αναπαράσταση του φυσικού (3.1.1) και του μοντελοποιημένου δικτύου (3.1.2) μπορεί να φανεί και να συγκριθεί παρακάτω για το νέο δίκτυο  $G^k$  που λαμβάνει υπόψη την ικανότητα των αποσπώμενων λεωφορείων. Στη φυσική αναπαράσταση τοποθετούμε έναν επιπλέον κόμβο που αντιστοιχεί στην αποθήκευση των αποσπώμενων μονάδων. Επιπλέον, παρουσιάζουμε τις φυσικές τοποθεσίες των αποθηκών προέλευσης και προορισμού  $o_k, d_k$ , τις διαδρομές που μπορεί δυνητικά να εκτελέσει το όχημα  $k$ ,  $V^k = \{1, 2\}$  τον φορτιστή  $z$  που μπορεί να φιλοξενήσει δύο γεγονότα φόρτισης  $F = \{a, b\}$  και την αποθήκη αποσπώμενων μονάδων  $g$  που μπορεί να φιλοξενήσει δύο γεγονότα σύζευξης/αποσύζευξης  $H = \{c, h\}$ . Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα δύο ταξίδια πρέπει να εξυπηρετήσουν 3 στάσεις και λειτουργούν στην ίδια γραμμή. Επίσης, τα

δύο γεγονότα φόρτισης και σύζευξης/αποσύζευξης συμβαίνουν στην ίδια φυσική θέση, οπότε εισάγονται μόνο δύο ξεχωριστοί κόμβοι. Προχωρώντας στην αναπαράσταση του μοντελοποιημένου δικτύου, δημιουργούμε τους κόμβους εργασιών  $N^k = \{V^k \cup H \cup F \cup \{o_k, d_k\}\}$ .  $V^k = \{1, 2\}$  αντιπροσωπεύουν τις δύο εργασίες ταξιδιού,  $F = \{a, b\}$  αντιπροσωπεύουν τις δύο εργασίες συμβάντος φόρτισης και  $H = \{c, h\}$  αντιπροσωπεύουν τις δύο εργασίες συμβάντος σύζευξης/αποσύζευξης. Σε αντίθεση με τη φυσική αναπαράσταση, ακόμη και αν τα ταξίδια λειτουργούν στην ίδια γραμμή, τα γεγονότα φόρτισης βρίσκονται στον ίδιο φορτιστή και τα γεγονότα σύζευξης/αποσύζευξης ολοκληρώνονται στην ίδια αποθήκη, παρουσιάζονται ως ανεξάρτητοι κόμβοι χωρίς τη χρήση πληροφοριών από τις φυσικές τους θέσεις. Τέλος, δημιουργούμε τα τόξα  $A_k$  όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο και έτσι σχηματίζεται η μοντελοποιημένη αναπαράσταση του δικτύου. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι δεν επιτρέπονται τα τόξα που συνδέουν απευθείας εργασίες σύζευξης/αποσύζευξης  $H = \{c, h\}$ . Το ίδιο ισχύει και για τις εργασίες φόρτισης  $F = \{a, b\}$

#### PHYSICAL NETWORK REPRESENTATION

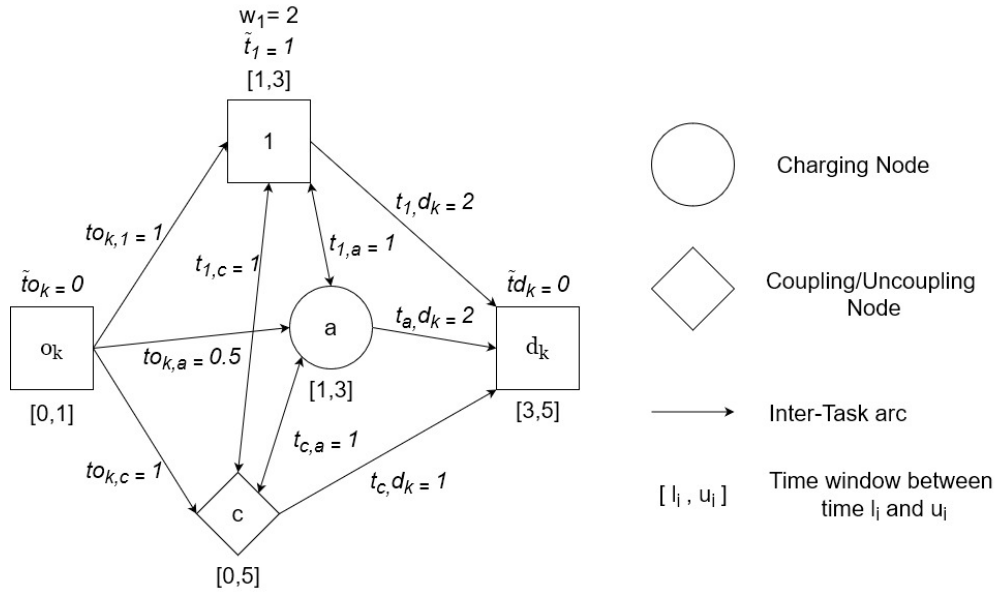


Σχήμα 3.1.1: Φυσική αναπαράσταση του δικτύου  $G^k = \{N^k, A^k\}$  ενός οχήματος  $k$



Σχήμα 3.1.2: Μοντελοποιημένη αναπαράσταση του δικτύου  $G^k = \{N^k, A^k\}$  ενός οχήματος  $k$

Επιπλέον, παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα χρόνων ταξιδιού μεταξύ/εντός εργασιών και χρονικών παραθύρων (3.1.3). Όπως είδαμε και συζητήσαμε παραπάνω, παρουσιάζονται τέσσερα πρόσθετα τόξα που συμπληρώνουν το δίκτυο με τους σχετικούς χρόνους ταξιδιού. Εμφανίζονται επίσης οι απαιτούμενες αποσπώμενες μονάδες για την εκτέλεση του ταξιδιού 1. Ο κόμβος  $c$  δεν έχει χρονικό παράθυρο αλλά μπορεί να εκτελεστεί εντός των καθορισμένων χρονικών διαστημάτων. Κάθε εργασία, εκτός από την εργασία σύζευξης/αποσύζευξης, έχει ένα κατώτερο  $l_i$  και ανώτερο  $u_i$  χρονικό όριο που είναι ανεξάρτητο από το όχημα. Κάθε κόμβος και τόξο συνδέεται με ένα χρόνο  $t_i$  ή  $\tilde{t}_i$  αντίστοιχα. Εδώ εισάγουμε την απαίτηση της αποσπώμενης μονάδας. Το όχημα πρέπει να πληροί την απαίτηση αποσπώμενης μονάδας για να εκτελεστεί το ταξίδι 1. Για παράδειγμα, ένα όχημα με ήδη συνδεδεμένες 2 αποσπώμενες μονάδες μπορεί να ολοκληρώσει το έργο εξυπηρέτησης ξεκινώντας από την αποθήκη  $o_k$  πηγαίνοντας στο ταξίδι 1 και στη συνέχεια να τερματίσει την εξυπηρέτησή του στην αποθήκη  $d_k$ . Ο συνολικός χρόνος είναι  $T_{d_k}^k = t_{o_k,1} + \tilde{t}_1 + t_{1,d_k} = 1 + 1 + 2 = 4$  που είναι εντός του χρονικού παραθύρου όλων των χρησιμοποιούμενων αποθηκών. Αντίθετα, ένα όχημα χωρίς συνδεδεμένες αποσπώμενες μονάδες πρέπει πρώτα να ολοκληρώσει την εργασία σύζευξης και στη συνέχεια το ταξίδι 1. Στην περίπτωση αυτή ο συνολικός χρόνος διαμορφώνεται ως εξής  $T_{d_k}^k = t_{o_k,c} + t_{c,1} + \tilde{t}_1 + t_{1,d_k} = 1 + 1 + 1 + 2 = 5$



Σχήμα 3.1.3: Παράδειγμα χρόνων ταξιδιού διάρκειας μεταξύ/εντός εργασιών και χρονικών παραθύρων.

## 3.2 Σύνολα

- $K$  : σύνολο διαθέσιμων οχημάτων.
- $H$  : σύνολο εργασιών σύζευξης/αποσύζευξης.
- $Z$  : σύνολο σταθμών φόρτισης.
- $O, D$  : σύνολα αποθηκών προέλευσης και προορισμού.
- $V$  : σύνολο ταξιδιών.
- $V^k$  : υποσύνολο προγραμματισμένων ταξιδιών που μπορούν να πραγματοποιηθούν από το όχημα  $k \in K$ .
- $F$  : σύνολο όλων των πιθανών γεγονότων χρέωσης.
- $F_0$  :  $F_0 \subset F$  είναι το σύνολο όλων των πιθανών γεγονότων φόρτισης μετά την αφαίρεση του τελευταίου πιθανού γεγονότος φόρτισης σε κάθε φορτιστή.
- $F^z$  : υποσύνολο των πιθανών γεγονότων φόρτισης στο φορτιστή  $z \in Z$  ταξινομημένο από το πρώτο προς το τελευταίο.
- $N^k$  : υποσύνολο κόμβων που σχετίζονται με το όχημα  $k$ ,  $V^k \cup H \cup F \cup \{o_k, d_k\}$ .
- $N$  : σύνολο όλων των πιθανών κόμβων εργασίας,  $N = \{V \cup F \cup H \cup O \cup D\}$ .
- $A^k$  : σύνολο εφικτών τόξων για το όχημα  $k \in K$ .
- $G^k$  :  $G^k = (N^k, A^k)$  είναι το δίκτυο που σχετίζεται με το όχημα  $k$ .



### 3.3 Παράμετροι

- $o_k, d_k$  : ο κόμβος πηγής και ο κόμβος καταβόθρας που σχετίζονται με την αποθήκη που στεγάζει το όχημα  $k$ .
- $[l_i, u_i]$  : χρονικό παράθυρο που σχετίζεται με κάθε κόμβο  $i \in N$ .
- $t_{ij}$  : χρόνος που παρήλθε στο τόξο  $(i, j)$  ο οποίος ισούται με το χρόνο διαδρομής μεταξύ της θέσης τέλους της εργασίας  $i \in N$  και της θέσης έναρξης της εργασίας  $j \in N$ .
- $\tilde{t}_i$  : απαιτούμενος χρόνος ταξιδιού για τη διεξαγωγή του ταξιδιού  $i \in V$ .
- $w_j$  : απαιτούμενες αποσπώμενες μονάδες που συνδέονται για να εκτελεστεί το ταξίδι  $j \in V$ .
- $m$  : ένας μεγάλος θετικός αριθμός.
- $\rho$  : χρόνος που απαιτείται για να συνδεθεί μια αποσπώμενη μονάδα στο όχημα  $k \in K$
- $\lambda$  : μονάδα κόστους αναμονής ενός οχήματος.
- $b_{ij}^k$  : η συνιστώσα σταθερού κόστους της εκτέλεσης της εργασίας  $j$  μετά την εργασία  $i$  χωρίς να λαμβάνεται υπόψη οποιαδήποτε πιθανή καθυστέρηση (η εργασία ξεκινά αμέσως μετά χωρίς χρονικές καθυστερήσεις).
- $\phi_{max}^k$  : SOC του οχήματος  $k$  όταν είναι πλήρως φορτισμένο.
- $\phi_{min}^k$  : ελάχιστο επιτρεπόμενο επίπεδο SOC για το όχημα  $k$ .
- $r$  : ρυθμός φόρτισης του φορτιστή.
- $\eta_i$  : καταναλισκόμενη ενέργεια κατά την εκτέλεση διαδρομής  $i \in V$ .
- $\theta_{ij}$  : καταναλισκόμενη ενέργεια κατά τη διαδρομή από την τελική θέση του κόμβου  $i \in N$  στην αρχική θέση του κόμβου  $j \in N$ .
- $M$  : ένας πολύ μεγάλος θετικός αριθμός
- $q_j$  : διάνυσμα  $q : V \rightarrow F$  επιστρέφει την πλησιέστερη θέση γεγονότος φόρτισης στο  $q_j \in F$  τη θέση τέλους του ταξιδιού  $j \in V$
- $\omega_i$  : διάνυσμα που επιστρέφει το επόμενο συμβάν φόρτισης  $i$  του συμβάντος φόρτισης που πραγματοποιείται στον ίδιο σταθμό φόρτισης

### 3.4 Μεταβλητές

- $e_i^k$  : SOC του οχήματος  $k$  όταν φτάνει στον κόμβο  $i \in V^k \cup F \cup H \cup \{d_k\}$ .  
 $\bar{e}_i^k$  : SOC του οχήματος  $k$  όταν ολοκληρώνει την εργασία στον κόμβο  $i \in V^k \cup F \cup H \cup \{o_k\}$ .  
 $\tau_i^k$  : απαιτούμενο χρονικό διάστημα για την επαναφόρτιση του οχήματος  $k \in K$  μέσω του γεγονότος φόρτισης  $i \in F$ .  
 $g_i^k$  : αλλαγή του SOC του οχήματος κατά την εκτέλεση της εργασίας  $i \in V^k \cup F$ .  
 $x_{ij}^k$  : δυαδική μεταβλητή ροής, όπου  $x_{ij}^k = 1$  αν το όχημα  $k$  χρησιμοποιεί τόξο  $(i, j) \in A_k$  και 0 αλλιώς.  
 $y_i^k$  : δυαδική μεταβλητή, όπου  $y_i^k = 1$  αν το γεγονός φόρτισης  $i \in F$  εκτελείται από το όχημα  $k$  και 0 διαφορετικά.  
 $\bar{q}_i^k$  : δυαδική μεταβλητή, όπου  $\bar{q}_i^k = 1$  εάν το όχημα  $k$  εκτελεί το συμβάν σύζευξης/αποσύζευξης  $i \in H$  και 0 διαφορετικά.  
 $\bar{z}_i^k$  : μεταβλητή που δείχνει πόσες αποσπώμενες μονάδες συνδέονται ή αποσπώνται από το όχημα  $k \in K$  όταν ολοκληρώνεται το συμβάν σύζευξης/αποσύζευξης  $i \in H$ .  
 $\bar{k}_i^k$  : συνδεδεμένες αποσπώμενες μονάδες στο όχημα  $k \in K$  όταν φτάνει στον κόμβο  $i \in N$ .  
 $\bar{t}_i^k$  : χρόνος κατά τον οποίο το γεγονός σύζευξης/αποσύζευξης  $i \in H$  ολοκληρώνεται από το όχημα  $k \in K$ .  
 $\psi_{ij}^k$  : οι επί του παρόντος συνδεδεμένες αποσπώμενες μονάδες του οχήματος  $k \in K$  όταν χρησιμοποιεί το τόξο  $(i, j) \in A_k$ .  
 $T_i^k$  : χρόνος κατά τον οποίο αρχίζει η εξυπηρέτηση στον κόμβο  $i \in N^k$ .  $T_{o_k}^k$  υποδηλώνει την ώρα αναχώρησης από την αποθήκη,  $T_{d_k}^k$  την ώρα άφιξης στην αποθήκη, και η  $T_i^k$  ώρα που η εξυπηρέτηση αρχίζει σε οποιονδήποτε άλλο κόμβο  $i \in V^k \cup F$ .

### 3.5 Περιορισμοί

Παρακάτω παρουσιάζουμε τους περιορισμούς που διατυπώνουν το πρόβλημα προγραμματισμού οχημάτων ηλεκτρικών λεωφορείων πολλαπλών σταθμών με χρονικά παράθυρα (EB-MDVSPWTW) από την έρευνα των (Gkiotsalitis et al. (2023)). Επίσης, εισάγουμε τους πρόσθετους περιορισμούς προκειμένου να λάβουμε υπόψη την τεχνολογία των αποσπώμενων λεωφορείων. Στις δύο παρακάτω ενότητες παρουσιάζονται και επεξηγούνται οι περιορισμοί προγραμματισμού οχημάτων και ηλεκτρικής φόρτισης από την έρευνα (Gkiotsalitis et al. (2023)). Τέλος, στην τελευταία ενότητα παρουσιάζονται και εξηγούνται οι περιορισμοί των αποσπώμενων μονάδων που ενσωματώνουμε στην αρχική εργασία.

## 3.5.1 Περιορισμοί προγραμματισμού οχημάτων

$$\sum_{k \in K} \sum_{i:(i,j) \in A^k} x_{ij}^k = 1 \quad \forall j \in V \quad (3.5.1)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{i:(i,j) \in A^k} x_{ij}^k \leq 1 \quad \forall j \in F \cup H \quad (3.5.2)$$

$$\sum_{j:(o_k,j) \in A^k} x_{o_k,j}^k = \sum_{i:(i,d_k) \in A^k} x_{i,d_k}^k = 1 \quad \forall k \in K \quad (3.5.3)$$

$$\sum_{i:(i,j) \in A^k} x_{i,j}^k - \sum_{i:(j,i) \in A^k} x_{j,i}^k = 0 \quad \forall k \in K, \forall j \in V^k \cup F \quad (3.5.4)$$

$$x_{ij}^k (T_i^k + \tilde{t}_i + t_{ij}) \leq x_{ij}^k T_j^k \quad \forall k \in K, \forall (i,j) \in A^k \mid i \in V^k \quad (3.5.5)$$

$$x_{o_k,j}^k (T_{o_k}^k + t_{o_k,j}) \leq x_{o_k,j}^k T_j^k \quad \forall k \in K, \forall (o_k,j) \in A^k \quad (3.5.6)$$

$$x_{ij}^k (T_i^k + \tau_i^k + t_{ij}) \leq x_{ij}^k T_j^k \quad \forall k \in K, \forall (i,j) \in A^k \mid i \in F \quad (3.5.7)$$

$$x_{ij}^k (T_i^k + \bar{t}_i + t_{ij}) \leq x_{ij}^k T_j^k \quad \forall k \in K, \forall (i,j) \in A^k \mid i \in H \quad (3.5.8)$$

$$\tau_i^k = (\phi_{\max}^k - e_i^k) / r \quad \forall i \in F, \forall k \in K \quad (3.5.9)$$

$$l_i \leq T_i^k \leq u_i \quad \forall k \in K, \forall i \in N^k \quad (3.5.10)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K, \forall (i,j) \in A^k \quad (3.5.11)$$

Ξεκινώντας από τον πρώτο περιορισμό (3.5.1) εξασφαλίζεται ότι κάθε ταξίδι  $j \in V$  θα εκτελεστεί από ακριβώς ένα όχημα. Ο περιορισμός (3.5.2) διασφαλίζει ότι ένα γεγονός φόρτισης  $j \in F$  και σύζευξης/αποσύζευξης  $j \in H$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί από το πολύ ένα όχημα. Ο περιορισμός (3.5.3) εξασφαλίζει ότι κάθε όχημα  $k \in K$  θα ξεκινά από την αποθήκη προέλευσης και θα επιστρέφει στην αποθήκη προορισμού του. Ο περιορισμός (3.5.4) λαμβάνει υπόψη τα γεγονότα φόρτισης στους περιορισμούς του δικτύου που σχετίζονται με τη διατήρηση της ροής. Είναι σημαντικό ότι ο περιορισμός (3.5.5) δεν λαμβάνει υπόψη τα τόξα που έχουν κόμβο αρχής τα γεγονότα  $F$ , επειδή ο χρόνος διαδρομής μεταξύ των δραστηριοτήτων δεν εξαρτάται μόνο από το  $t_{ij}$ . Εισάγουμε τον περιορισμό (3.5.7) όπου  $i$  είναι ένα γεγονός φόρτισης  $i \in F$  και ο χρόνος που μετακινήθηκε στο τόξο  $(i,j)$  είναι ίσος με τη διάρκεια της εργασίας  $i$ ,  $\tau_i^k$ , συν το χρόνο ταξιδιού μεταξύ της θέσης τέλους της εργασίας  $i$  και της θέσης έναρξης της εργασίας  $j$ ,  $t_{ij}$ . Επιπλέον, ο περιορισμός (3.5.8) λαμβάνει υπόψη το χρόνο που απαιτείται για την εκτέλεση ενός γεγονότος σύζευξης/αποσύζευξης. Ο περιορισμός (3.5.9) επιστρέφει τις τιμές του  $\tau_i^k$ . Ο περιορισμός (3.5.10) εξασφαλίζει ότι ο χρόνος έναρξης μιας υπηρεσίας για το όχημα  $k \in K$  τηρεί την χρόνο έναρξης και λήξης του χρονικού παραθύρου  $l_i, u_i$ . Ο περιορισμός (3.5.11) υποδεικνύει τις τιμές της μεταβλητής  $x_{ij}^k$ .

## 3.5.2 Περιορισμοί ηλεκτρικής φόρτισης

$$\bar{e}_{o_k} = \phi_{\max}^k \quad \forall k \in K \quad (3.5.12)$$

$$\bar{e}_j^k = e_j^k - g_j^k \quad \forall j \in V^k \cup F, \quad \forall k \in K \quad (3.5.13)$$

$$e_j^k \geq (\bar{e}_i^k - \theta_{ij}(1 + \psi_{ij}^k)) x_{ij}^k \quad \forall (i, j) \in A^k, \quad \forall k \in K \quad (3.5.14)$$

$$e_j^k \leq (\bar{e}_i^k - \theta_{ij}(1 + \psi_{ij}^k)) + (1 - x_{ij}^k) M \quad \forall (i, j) \in A^k, \quad \forall k \in K \quad (3.5.15)$$

$$g_i^k = \eta_i(1 + \bar{k}_i^k) \quad \forall i \in V^k, \quad \forall k \in K \quad (3.5.16)$$

$$g_i^k = e_i^k - \phi_{\max}^k \quad \forall i \in F, \quad \forall k \in K \quad (3.5.17)$$

$$\phi_{\min}^k \leq e_j^k \quad \forall k \in K, \quad \forall j \in V^k \cup F \cup H \cup \{d_k\} \quad (3.5.18)$$

$$\bar{e}_j^k = e_j^k \quad \forall j \in H, \quad \forall k \in K \quad (3.5.19)$$

$$y_i^k = \sum_{j:(i,j) \in A^k} x_{ij}^k \quad \forall i \in F, \quad \forall k \in K \quad (3.5.20)$$

$$\sum_{k \in K} y_i^k (T_i^k + \tau_i^k) \leq T_{\omega_i}^k + M \left( 1 - \sum_{\rho:(\omega_i, \rho) \in A^k} x_{\omega_i \rho}^k \right) \quad \forall i \in F_0, \quad \forall k \in K \quad (3.5.21)$$

Οι περιορισμοί (3.5.12)-(3.5.17) επιστρέφουν τις τιμές SOC όταν τα οχήματα ταξιδεύουν μεταξύ των κόμβων. Όταν  $x_{ij}^k = 1$  οι περιορισμοί (3.5.14) και (3.5.15) επιβάλλουν το  $e_j^k$  να είναι ίσο με την τιμή SOC μετά την αναχώρηση από τον κόμβο  $i$ ,  $\bar{e}_j^k$ , μείον την ενέργεια που καταναλώθηκε για να ταξιδέψει από  $i$  σε  $j$ ,  $\theta_{ij}$ . Ο συνδυασμός των δύο περιορισμών όταν  $x_{ij}^k = 0$ , μας παρέχει το εύρος τιμών για τη μεταβλητή  $e_j^k$ . Είναι  $e_j^k \geq 0$  για (3.5.14) και  $e_j^k \leq (\bar{e}_i^k - \theta_{ij}) + M$  για (3.5.15). Ο περιορισμός (3.5.18) διασφαλίζει ότι το SOC του οχήματος  $k$  κατά την άφιξη στον κόμβο  $j \in V^k \cup F \cup H \cup \{d_k\}$  είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το ελάχιστο επιτρεπόμενο όριο SOC. Οι περιορισμοί (3.5.20)-(3.5.21) διασφαλίζουν ότι εάν ένας φορτιστής  $z \in Z$  χρησιμοποιείται από ένα όχημα κατά τη διάρκεια του συμβάντος φόρτισης  $i \in F$ , το επόμενο συμβάν φόρτισης στον ίδιο φορτιστή  $\omega_i$ , θα ξεκινήσει μετά την ώρα λήξης του προηγούμενου συμβάντος φόρτισης. Αυτό απαγορεύει σε δύο οχήματα να χρησιμοποιούν ταυτόχρονα τον ίδιο φορτιστή μίας εξόδου. Ο περιορισμός ανισότητας (3.5.21) ικανοποιείται εξ ορισμού εάν το γεγονός φόρτισης  $i$  δεν χρησιμοποιείται από κανένα όχημα. Εάν ένας φορτιστής χρησιμοποιείται από ένα όχημα  $k \in K$  κατά τη διάρκεια του συμβάντος φόρτισης  $i \in F_0$ , τότε ο περιορισμός (3.5.20) θα αναγκάσει το  $y_i^k$  να είναι ίσο με 1. Τότε και το επόμενο συμβάν φόρτισης στον ίδιο φορτιστή,  $\omega_i$  χρησιμοποιείται από ένα όχημα  $k \in K$ . Ο χρόνος έναρξης του  $T_{\omega_i}^k$  εξαναγκάζεται να είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον χρόνο λήξης του οχήματος που χρησιμοποίησε το γεγονός φόρτισης  $i$  και υποδεικνύεται από τον περιορισμό (3.5.20) ως  $\sum_{k \in K} y_i^k (T_i^k + \tau_i^k)$ . Τέλος, ο περιορισμός (3.5.19) εξασφαλίζει ότι όταν το όχημα  $i \in K$  επισκέπτεται την αποθήκη σύζευξης, το επίπεδο SOC με το οποίο φτάνει στον κόμβο  $i \in H$  είναι ίσο με το επίπεδο SOC όταν το όχημα ολοκληρώνει τη διαδικασία σύζευξης/αποσύζευξης.

### 3.5.3 Περιορισμοί αποσπώμενων μονάδων

$$\sum_{k \in K} \sum_{i:(i,j) \in A^k} q_i^k \leq 3 \quad \forall i \in H \quad (3.5.22)$$

$$\bar{k}_{o_k}^k = 0 \quad \forall k \in K \quad (3.5.23)$$

$$q_i^k = \sum_{j:(i,j) \in A^k} x_{ij}^k \quad \forall i \in H, \forall k \in K \quad (3.5.24)$$

$$\bar{k}_i^k \geq x_{i,j}^k w_j \quad \forall k \in K, \forall (i,j) \in A^k, \text{ if } i \in V \cup F \cup \{o_k\}, j \in V \quad (3.5.25)$$

$$\bar{k}_i^k + \bar{z}_i^k \geq x_{ij}^k w_j \quad \forall k \in K, \forall (i,j) \in A^k, \text{ if } i \in H, j \in V \quad (3.5.26)$$

$$\bar{k}_j^k - \bar{k}_i^k - \bar{z}_i^k \leq (1 - x_{ij}^k)M \quad \forall k \in K, \forall (i,j) \in A^k, \text{ if } i \in H \quad (3.5.27)$$

$$\bar{k}_j^k - \bar{k}_i^k - \bar{z}_i^k \geq (x_{ij}^k - 1)M \quad \forall k \in K, \forall (i,j) \in A^k, \text{ if } i \in H \quad (3.5.28)$$

$$\bar{k}_j^k - \bar{k}_i^k \leq (1 - x_{ij}^k)M \quad \forall k \in K, \forall (i,j) \in A^k, \text{ if } i \notin H \quad (3.5.29)$$

$$\bar{k}_j^k - \bar{k}_i^k \geq (x_{ij}^k - 1)M \quad \forall k \in K, \forall (i,j) \in A^k, \text{ if } i \notin H \quad (3.5.30)$$

$$\bar{t}_i^k = \rho | \bar{z}_i^k | \quad \forall i \in H, \forall k \in K \quad (3.5.31)$$

Τέλος, σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε τους περιορισμούς των αποσπώμενων μονάδων. Η διατύπωση με χρονικά παράθυρα διατηρείται. Κάθε όχημα ξεκινά από την αρχική αποθήκη  $o_k$  με μηδενικές αποσπώμενες μονάδες συνδεδεμένες λόγω του περιορισμού (3.5.23). Ο περιορισμός (3.5.22) διασφαλίζει ότι κάθε όχημα  $k \in K$  μπορεί να εκτελέσει το πολύ τρία γεγονότα σύζευξης/αποσύζευξης  $i \in H$ . Ο περιορισμός (3.5.24) εξασφαλίζει ότι όταν το όχημα  $k \in K$  επισκέπτεται το γεγονός σύζευξης/αποσύζευξης  $i \in H$  η δυαδική μεταβλητή  $q_i^k$  παίρνει την τιμή 1. Οι περιορισμοί (3.5.25) και (3.5.26) εγγυώνται ότι το όχημα  $k \in K$  έχει τις απαιτούμενες αποσπώμενες μονάδες συνδεδεμένες για να εκτελέσει το ταξίδι  $j \in V$ . Οι περιορισμοί (3.5.27) και (3.5.28) εξασφαλίζουν ότι όταν το όχημα  $k \in K$  επισκέπτεται την αποθήκη αποσπώμενων μονάδων, οι απαιτούμενες αποσπώμενες μονάδες συνδέονται. Οι περιορισμοί (3.5.29) και (3.5.30) εξασφαλίζουν ότι οι αποσπώμενες μονάδες που συνδέονται με ένα όχημα  $k \in K$  παραμένουν οι ίδιες όταν επισκέπτεται κόμβους εκτός από τους κόμβους  $i \in H$ . Τέλος, ο περιορισμός (3.5.31) υπολογίζει το χρόνο που απαιτείται για την εκτέλεση ενός γεγονότος σύζευξης/αποσύζευξης  $i \in H$  για ένα όχημα  $k \in K$ .

## 3.6 Αντικειμενική συνάρτηση

Η αντικειμενική συνάρτηση σύμφωνα με τους περιορισμούς προγραμματισμού οχημάτων (3.5.1)-(3.5.11), τους περιορισμούς ηλεκτρικής φόρτισης (3.5.12)-(3.5.21) και τέλος και τους καινούργιους περιορισμούς αποσπώμενων μονάδων (3.5.22)-(3.5.31) διατυπώνεται όπως φαίνεται

παρακάτω:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A^k \mid i \in V^k} \left( (1 + \psi_{ij}^k) b_{ij}^k + \lambda (T_j^k - T_i^k - \tilde{t}_i - t_{ij}) \right) x_{ij}^k \\
 & + \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A^k \mid i \in F} \left( (1 + \psi_{ij}^k) b_{ij}^k + \lambda (T_j^k - T_i^k - \tau_i^k - t_{ij}) \right) x_{ij}^k \\
 & + \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A^k \mid i \in H} \left( (1 + \psi_{ij}^k) b_{ij}^k + \lambda (T_j^k - T_i^k - \bar{t}_i - t_{ij}) \right) x_{ij}^k
 \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

Το EB-MDVSPTW με αποσπώμενες μονάδες είναι ένα μικτό αθέραιο μη γραμμικό πρόγραμμα (MINLP) με μη γραμμική αντικειμενική συνάρτηση και μη γραμμικούς περιορισμούς (3.5.5), (3.5.6), (3.5.7), (3.5.8), (3.5.14), (3.5.21), (3.5.31). Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να λύσουμε ένα μη γραμμικό πρόγραμμα με αρκετούς μη γραμμικούς περιορισμούς που μπορεί να απαγορεύουν την εύρεση μιας συνολικά βέλτιστης λύσης.

### 3.7 Γραμμική μετατροπή του EB-MDVSPTW με αποσπώμενα λεωφορεία

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως η αντικειμενική συνάρτηση (3.6.1), μαζί με τους συγκεκριμένους περιορισμούς που αναφέρθηκαν είναι μη γραμμικές. Προκειμένου να εγγυηθούμε ότι οι τοπικά βέλτιστες λύσεις μας είναι συνολικά βέλτιστες, πρέπει να εκτελέσουμε ένα βήμα γραμμικοποίησης. Ξεκινώντας με τους περιορισμούς (3.5.5), (3.5.6), (3.5.7), (3.5.8):

$$\begin{aligned}
 x_{ij}^k (T_i^k + \tilde{t}_i + t_{ij}) &\leq x_{i,j}^k T_j^k && \forall k \in K, \forall (i,j) \in A^k \mid i \in V^k \\
 x_{ok,j}^k (T_{ok}^k + t_{ok,j}) &\leq x_{ok,j}^k T_j^k && \forall k \in K, \forall (ok,j) \in A^k \\
 x_{ij}^k (T_i^k + \tau_i^k + t_{ij}) &\leq x_{ij}^k T_j^k && \forall k \in K, \forall (i,j) \in A^k \mid i \in F \\
 x_{ij}^k (T_i^k + \bar{t}_i + t_{ij}) &\leq x_{ij}^k T_j^k && \forall k \in K, \forall (i,j) \in A^k \mid i \in H
 \end{aligned}$$

Εισάγουμε τις συνεχείς μεταβλητές  $\sigma_{ij}^k \in \mathbb{R}$  για  $(i,j) \in A^k, k \in K$ . Αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αναδιατύπωση των περιορισμών (3.5.5), (3.5.6), (3.5.7), (3.5.8) σε γραμμικούς όπως φαίνεται παρακάτω.

$$T_i^k + \tilde{t}_i + t_{ij} - T_j^k + \sigma_{ij}^k \leq 0 \quad \forall k \in K, \forall (i, j) \in A^k \mid i \in V^k \quad (3.7.1)$$

$$T_{o_k}^k + t_{o_k j} - T_j^k + \sigma_{o_k j}^k \leq 0 \quad \forall k \in K, \forall (o_k, j) \in A^k \quad (3.7.2)$$

$$T_i^k + \tau_i^k + t_{ij} - T_j^k + \sigma_{ij}^k \leq 0 \quad \forall k \in K, \forall (i, j) \in A^k \mid i \in F \quad (3.7.3)$$

$$T_i^k + \bar{t}_i^k + t_{ij} - T_j^k + \tilde{\sigma}_{ij}^k \leq 0 \quad \forall k \in K, \forall (i, j) \in A^k \mid i \in H \quad (3.7.4)$$

$$\sigma_{ij}^k \leq M(1 - x_{ij}^k) \quad \forall k \in K, \forall (i, j) \in A^k \quad (3.7.5)$$

$$\sigma_{ij}^k \geq -M(1 - x_{ij}^k) \quad \forall k \in K, \forall (i, j) \in A^k \quad (3.7.6)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij}^k \leq M(1 - x_{ij}^k) \quad \forall k \in K, \forall (i, j) \in A^k \mid i \in H \quad (3.7.7)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij}^k \geq -M(1 - x_{ij}^k) \quad \forall k \in K, \forall (i, j) \in A^k \mid i \in H \quad (3.7.8)$$

### Απόδειξη

Για  $x_{ij}^k = 1$  για κάποια  $(i, j) \in A^k \mid i \in V^k$  ο περιορισμός (3.5.5) θα απαιτεί ότι  $T_i^k + \tilde{t}_i + t_{ij} \leq T_j^k$ . Ομοίως, για  $x_{ij}^k = 1$  για κάποια  $(i, j) \in A^k \mid i \in V^k$  οι περιορισμοί (3.7.5) και (3.7.6) θα επιβάλλουν ότι  $\sigma_{ij}^k = 0$  και ο περιορισμός (3.7.1) θα απαιτεί ότι  $T_i^k + \tilde{t}_i + t_{ij} \leq T_j^k$ . Επιπλέον, για  $x_{ij}^k = 0$  για κάποια  $(i, j) \in A^k \mid i \in V^k$  ο περιορισμός (3.5.5) ικανοποιείται για κάθε  $T_i^k, T_j^k$ . Ομοίως, για  $x_{ij}^k = 0$  για κάποια  $(i, j) \in A^k \mid i \in V^k$  ο περιορισμός (3.7.5) και (3.7.6) επιτρέπει στο  $\sigma_{ij}^k$  να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή μεταξύ  $-M, M$  και έτσι ο περιορισμός (3.7.1) μπορεί να ικανοποιηθεί για κάθε  $T_i^k, T_j^k$ . Με την ίδια λογική, οι περιορισμοί (3.5.5)-(3.5.8) είναι ισοδύναμοι με τους περιορισμούς (3.7.1)-(3.7.8).

Επιπλέον, ο μη γραμμικός περιορισμός (3.5.14):

$$e_j^k \geq (\bar{e}_i^k - \theta_{ij}) x_{ij}^k \quad \forall (i, j) \in A^k, \quad \forall k \in K$$

μπορεί να αντικατασταθεί από το ακόλουθο ισοδύναμο σύνολο γραμμικών περιορισμών ανισότητας με τη χρήση της νεοεισαχθείσας συνεχούς μεταβλητής  $\bar{\sigma}_{ij}^k$ .

$$e_j^k \geq (\bar{e}_i^k - \theta_{ij}(1 + \psi_{ij}^k)) + \bar{\sigma}_{ij}^k \quad \forall (i, j) \in A^k, \forall k \in K \quad (3.7.9)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^k \leq M(1 - x_{ij}^k) \quad \forall (i, j) \in A^k, \forall k \in K \quad (3.7.10)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^k \geq -M(1 - x_{ij}^k) \quad \forall (i, j) \in A^k, \forall k \in K \quad (3.7.11)$$

Επιπλέον, ο μη γραμμικός περιορισμός (3.5.21):

$$\sum_{k \in K} y_i^k (T_i^k + \tau_i^k) \leq T_{\omega_i}^k + M \left( 1 - \sum_{\rho: (\omega_i, \rho) \in A_k} x_{\omega_i \rho}^k \right) \quad \forall i \in F_0, \quad \forall k \in K$$

μπορεί να γίνει γραμμικός προσθέτοντας τη συνεχής μεταβλητή  $\tilde{\sigma}_i^{k_0}$  για όλα τα  $i \in F$  και  $k_0 \in K$ .

$$T_i^{k_0} + \tau_i^{k_0} + \tilde{\sigma}_i^{k_0} \leq T_{\omega_i}^k + M \left( 1 - \sum_{\rho: (\omega_i, \rho) \in A^k} x_{\omega_i \rho}^k \right) \quad \forall i \in F_0, \forall k \in K, \forall k_0 \in K \quad (3.7.12)$$

$$\tilde{\sigma}_i^{k_0} \leq M (1 - y_i^{k_0}) \quad \forall i \in F_0, \forall k_0 \in K \quad (3.7.13)$$

$$\tilde{\sigma}_i^{k_0} \geq -M (1 - y_i^{k_0}) \quad \forall i \in F_0, \forall k_0 \in K \quad (3.7.14)$$

Οι περιορισμοί (3.7.12)-(3.7.14) είναι ισοδύναμοι με το μη γραμμικό περιορισμό (3.5.21).

### Απόδειξη

Εξετάστε την αριστερή πλευρά των περιορισμών (3.5.21). Λόγω των περιορισμών (3.5.2) το πολύ ένα όχημα θα εκτελέσει το γεγονός φόρτισης  $i \in F$ . Δηλαδή,  $\sum_{k \in K} y_i^k \leq 1$  για όλα τα  $i \in F_0$ ). Επειδή η  $y_i^k$  είναι δυαδική μεταβλητή, αυτό σημαίνει ότι αν υπάρχει κάποιο  $k^* \in K$  για το οποίο  $y_i^{k^*} = 1$ , τότε  $y_i^k = 0$  για όλα τα  $k \in K, k \neq k^*$ . Εξαιτίας αυτού μπορούμε να ξαναγράψουμε το (3.5.21) ως:

$$y_i^{k_0} (T_i^{k_0} + \tau_i^{k_0}) \leq T_{\omega_i}^k + M \left( 1 - \sum_{(\omega, \rho) \in A^k} x_{\omega \rho}^k \right) \quad \forall i \in F_0, \forall k \in K, \forall k_0 \in K$$

επειδή οι περιορισμοί αυτοί είναι ισοδύναμοι. Πιο αναλυτικά, αν το όχημα  $k_0$  δεν έχει ανατεθεί στο γεγονός  $i \in F$  τότε η αριστερή πλευρά  $y_i^{k_0} (T_i^{k_0} + \tau_i^{k_0})$  είναι ίση με 0 εξασφαλίζοντας ότι ο περιορισμός ικανοποιείται. Εάν, ωστόσο,  $k_0$  είναι το όχημα για το οποίο  $y_i^{k_0} = 1$  τότε ο περιορισμός γίνεται:

$$T_i^{k_0} + \tau_i^{k_0} \leq T_{\omega_i}^k + M \left( 1 - \sum_{(\omega, \rho) \in A^k} x_{\omega \rho}^k \right) \quad \forall i \in F_0, \forall k \in K$$



Ισοδύναμα, αν  $y_i^{k_0} = 1$  για κάποιο  $k_0 \in K$  τότε  $\sum_{k \in K} y_i^k (T_i^k + \tau_i^k) = (T_i^{k_0} + \tau_i^{k_0})$  επειδή  $y_i^k = 0$  για οποιοδήποτε άλλο  $k \in K$ . Αυτό αποδεικνύει ότι μπορούμε να γράψουμε το περιορισμό (3.5.21) ως εξής:

$$y_i^k (T_i^{k_0} + \tau_i^{k_0}) \leq T_{\omega_i}^k + M \left( 1 - \sum_{(\omega, \rho) \in A^k} x_{\omega\rho}^k \right) \quad \forall i \in F, \quad \forall k \in K, \quad \forall k_0 \in K$$

Τώρα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το  $y_i^{k_0} (T_i^{k_0} + \tau_i^{k_0})$  με  $(T_i^{k_0} + \tau_i^{k_0}) + \tilde{\sigma}_i^{k_0} \in \mathbb{R}$  αναγκάζεται να πάρει την τιμή 0 για  $y_i^{k_0} = 1$  λόγω των περιορισμών (3.7.13) και (3.7.14), και οποιαδήποτε άλλη τιμή τέτοια ώστε (3.7.12) να ικανοποιείται για  $y_i^{k_0} = 0$  επειδή στην περίπτωση αυτή  $\tilde{\sigma}_i^{k_0} \in [-M, M]$ .

Τέλος, γραμμικοποιούμε τον περιορισμό (3.5.31). Η απόλυτη τιμή της διαφοράς  $z_i^k$  μπορεί να εκφραστεί ως  $\max = (z_i^k, -z_i^k)$ . Μια συνεχής μεταβλητή  $\bar{r}_i^k \in \mathbb{R}$  μαζί με μια δυαδική μεταβλητή  $\delta_i^k \in (0, 1)$  εισάγονται. Η γραμμικοποίηση ολοκληρώνεται με τη διατύπωση των ακόλουθων περιορισμών:

$$\bar{r}_i^k \geq \bar{z}_i^k \quad \forall k \in K, \forall i \in H \quad (3.7.15)$$

$$\bar{r}_i^k \geq -\bar{z}_i^k \quad \forall k \in K, \forall i \in H \quad (3.7.16)$$

$$\bar{r}_i^k \leq \bar{z}_i^k + \delta_i^k M \quad \forall k \in K, \forall i \in H \quad (3.7.17)$$

$$\bar{r}_i^k \leq -\bar{z}_i^k + (1 - \delta_i^k) M \quad \forall k \in K, \forall i \in H \quad (3.7.18)$$

## Απόδειξη

Οι περιορισμοί (3.7.15) και (3.7.16) διασφαλίζουν ότι η τιμή  $\bar{r}_i^k$  δεν μπορεί να λάβει τιμή μικρότερη από την τιμή  $\bar{z}_i^k$  ή  $-\bar{z}_i^k$ . Έτσι, αυτό εγγυάται ότι  $\bar{r}_i^k \geq \max(\bar{z}_i^k, -\bar{z}_i^k)$ . Τώρα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι η τιμή της συνεχούς μεταβλητής  $\bar{r}_i^k$  θα ταιριάζει είτε με την τιμή της  $\bar{z}_i^k$  είτε με την τιμή της  $-\bar{z}_i^k$ . Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση των περιορισμών (3.7.17) και (3.7.18). Εξετάζουμε τις τρεις πιθανές περιπτώσεις για τις τιμές των  $\bar{z}_i^k$  και  $-\bar{z}_i^k$  προκειμένου να το αποδείξουμε.

Για  $\bar{z}_i^k > -\bar{z}_i^k$ , οι περιορισμοί (3.7.15) και (3.7.16) εξασφαλίζουν ότι  $\bar{r}_i^k \geq \bar{z}_i^k$ . Τότε για  $\bar{r}_i^k \geq \bar{z}_i^k$ , ο περιορισμός (3.7.18) μπορεί να ικανοποιηθεί μόνο αν  $\delta_i^k = 0$  αφού  $\bar{r}_i^k \geq \bar{z}_i^k > -\bar{z}_i^k$ . Τέλος ο περιορισμός (3.7.17) για  $\delta_i^k = 0$  επιβάλλει ότι  $\bar{r}_i^k \leq \bar{z}_i^k$  και συνεπώς  $\bar{r}_i^k = \max(\bar{z}_i^k, -\bar{z}_i^k) = \bar{z}_i^k$ .

Για  $-\bar{z}_i^k > \bar{z}_i^k$ , οι περιορισμοί (3.7.15) και (3.7.16) εξασφαλίζουν ότι  $\bar{r}_i^k \geq -\bar{z}_i^k$ . Τότε για  $\bar{r}_i^k \geq -\bar{z}_i^k$ , ο περιορισμός (3.7.17) μπορεί να ικανοποιηθεί μόνο αν  $\delta_i^k = 1$  αφού  $\bar{r}_i^k \geq -\bar{z}_i^k > \bar{z}_i^k$ . Τέλος ο περιορισμός (3.7.18) για  $\delta_i^k = 1$  επιβάλλει ότι  $\bar{r}_i^k \leq -\bar{z}_i^k$  και συνεπώς  $\bar{r}_i^k = \max(\bar{z}_i^k, -\bar{z}_i^k) = -\bar{z}_i^k$ .

Για  $\bar{z}_i^k = -\underline{z}_i^k$ ,  $\bar{r}_i^k$  θα πρέπει να αναγκαστεί να είναι ίσο είτε με  $\bar{z}_i^k$  είτε με  $-\bar{z}_i^k$  αφού και οι δύο τιμές είναι ίδιες. Σε αυτή την περίπτωση το  $\delta_i^k$  μπορεί να είναι είτε 0 είτε 1. Αν  $\delta_i^k = 0$  οι περιορισμοί (3.7.15) και (3.7.17) εξασφαλίζουν ότι  $\bar{r}_i^k = \bar{z}_i^k$ , αφού  $\bar{z}_i^k \geq \bar{r}_i^k \geq \bar{z}_i^k$ . Αν  $\delta_i^k = 1$  οι περιορισμοί (3.7.16) και (3.7.18) εξασφαλίζουν ότι  $\bar{r}_i^k = -\bar{z}_i^k$ , αφού  $-\bar{z}_i^k \geq \bar{r}_i^k \geq -\bar{z}_i^k$ . Άρα  $\bar{r}_i^k = \max(\bar{z}_i^k, -\bar{z}_i^k) = \bar{z}_i^k = -\bar{z}_i^k$ .

Έτσι, ο περιορισμός (3.5.31) αντικαθίσταται με τον περιορισμό:

$$\bar{t}_i^k = \rho \bar{r}_i^k, \quad \forall i \in H, \forall k \in K \quad (3.7.19)$$

Έχοντας γραμμικοποιήσει όλους τους μη γραμμικούς περιορισμούς, στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στη μη γραμμική αντικειμενική συνάρτηση:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A^k} \sum_{i \in V^k} \left( (1 + \psi_{ij}^k) b_{ij}^k + \lambda (T_j^k - T_i^k - \tilde{t}_i - t_{ij}) \right) x_{ij}^k \\ & + \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A^k} \sum_{i \in F} \left( (1 + \psi_{ij}^k) b_{ij}^k + \lambda (T_j^k - T_i^k - \tau_i^k - t_{ij}) \right) x_{ij}^k \\ & + \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A^k} \sum_{i \in H} \left( (1 + \psi_{ij}^k) b_{ij}^k + \lambda (T_j^k - T_i^k - \bar{t}_i - t_{ij}) \right) x_{ij}^k \end{aligned}$$

Εισάγουμε τη συνεχής μεταβλητή  $z_{ij}^k$  που πρέπει να παίρνει την τιμή

$$\begin{aligned} & \left( (1 + \psi_{ij}^k) b_{ij}^k + \lambda (T_j^k - T_i^k - \bar{t}_i - t_{ij}) \right) x_{ij}^k \text{ for } (i, j) \in A_k | i \in V^k \\ & \left( (1 + \psi_{ij}^k) b_{ij}^k + \lambda (T_j^k - T_i^k - \tau_i^k - t_{ij}) \right) x_{ij}^k \text{ for } (i, j) \in A_k | i \in F. \\ & \left( (1 + \psi_{ij}^k) b_{ij}^k + \lambda (T_j^k - T_i^k - t_i^k - t_{ij}) \right) x_{ij}^k \text{ for } (i, j) \in A_k | i \in H. \end{aligned}$$

Αυτό επιβάλλεται από το ακόλουθο σύνολο περιορισμών γραμμικής ανισότητας:

$$z_{ij}^k \leq x_{ij}^k M, \forall k \in K, (i, j) \in A_k, i \in V^k \cup F \cup H \quad (3.7.20)$$

$$z_{ij}^k \geq -x_{ij}^k M, \forall k \in K, (i, j) \in A_k, i \in V^k \cup F \cup H \quad (3.7.21)$$

$$z_{ij}^k \leq (1 + \psi_{ij}^k) b_{ij}^k + \lambda (T_j^k - T_i^k - \tilde{t}_i - t_{ij}) + M (1 - x_{ij}^k), \forall k \in K, (i, j) \in A_k, i \in V^k \quad (3.7.22)$$

$$z_{ij}^k \leq (1 + \psi_{ij}^k) b_{ij}^k + \lambda (T_j^k - T_i^k - \tau_i^k - t_{ij}) + M (1 - x_{ij}^k), \forall k \in K, (i, j) \in A_k, i \in F \quad (3.7.23)$$

$$z_{ij}^k \leq (1 + \psi_{ij}^k) b_{ij}^k + \lambda (T_j^k - T_i^k - \bar{t}_i^k - t_{ij}) + M (1 - x_{ij}^k), \forall k \in K, (i, j) \in A_k, i \in H \quad (3.7.24)$$

$$z_{ij}^k \geq (1 + \psi_{ij}^k) b_{ij}^k + \lambda (T_j^k - T_i^k - \tilde{t}_i - t_{ij}) - (1 - x_{ij}^k) M, \forall k \in K, (i, j) \in A_k, i \in V^k \quad (3.7.25)$$

$$z_{ij}^k \geq (1 + \psi_{ij}^k) b_{ij}^k + \lambda (T_j^k - T_i^k - \tau_i^k - t_{ij}) - (1 - x_{ij}^k) M, \forall k \in K, (i, j) \in A_k, i \in F \quad (3.7.26)$$

$$z_{ij}^k \geq (1 + \psi_{ij}^k) b_{ij}^k + \lambda (T_j^k - T_i^k - \bar{t}_i^k - t_{ij}) - (1 - x_{ij}^k) M, \forall k \in K, (i, j) \in A_k, i \in H \quad (3.7.27)$$

Η αντικειμενική συνάρτηση αντικαθίσταται από:

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A_k | i \in V^k \cup F \cup H} z_{ij}^k$$

Πρέπει τώρα, να αποδείξουμε ότι  $z_{ij}^k = ((1 + \psi_{ij}^k) b_{ij}^k + \lambda (T_j^k - T_i^k - \tilde{t}_i - t_{ij})) x_{ij}^k$  για  $(i, j) \in A_k | i \in V^k$ ,  $((1 + \psi_{ij}^k) b_{ij}^k + \lambda (T_j^k - T_i^k - \tau_i^k - t_{ij})) x_{ij}^k$  για  $(i, j) \in A_k | i \in F$  και  $((1 + \psi_{ij}^k) b_{ij}^k + \lambda (T_j^k - T_i^k - \bar{t}_i^k - t_{ij})) x_{ij}^k$  για  $(i, j) \in A_k | i \in H$ .

### Απόδειξη

Ξεκινώντας με την πρώτη περίπτωση. Εάν  $x_{ij}^k=0$ , οι περιορισμοί (3.7.20) και (3.7.21) επιβάλλουν  $z_{ij}^k=0$ . Αν  $x_{ij}^k=1$ , οι περιορισμοί (3.7.22) και (3.7.25) επιβάλλουν ότι  $z_{ij}^k = ((1 + \psi_{ij}^k) b_{ij}^k + \lambda (T_j^k - T_i^k - \tilde{t}_i - t_{ij}))$  για  $(i, j) \in A_k | i \in V^k$ . Ομοίως οι περιορισμοί (3.7.23) και (3.7.26) επιβάλλουν ότι  $z_{ij}^k = ((1 + \psi_{ij}^k) b_{ij}^k + \lambda (T_j^k - T_i^k - \tau_i^k - t_{ij}))$  για  $(i, j) \in A_k | i \in F$ . Τέλος, οι περιορισμοί (3.7.24) και (3.7.27) επιβάλλουν ότι  $z_{ij}^k = ((1 + \psi_{ij}^k) b_{ij}^k + \lambda (T_j^k - T_i^k - \bar{t}_i^k - t_{ij}))$  για  $(i, j) \in A_k | i \in H$ .

Λαμβάνοντας υπόψη όλες τις διαδικασίες γραμμικοποίησης των περιορισμών και της αντικειμενικής συνάρτησης καταλήγουμε στην ακόλουθη γραμμική αντικειμενική συνάρτηση με

γραμμικούς περιορισμούς ανισότητας:

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A_k | i \in V^k \cup F \cup H} z_{ij}^k \quad (3.7.28)$$

με περιορισμούς προγραμματισμού οχημάτων (3.5.1)-(3.5.4),(3.5.9)-(3.5.11) και (3.7.1)-(3.7.8), περιορισμοί προγραμματισμού ηλεκτρικών οχημάτων (3.5.12)-(3.5.13), (3.7.9)-(3.7.14) και (3.5.16)-(3.5.20) και και περιορισμούς αποσπώμενων μονάδων (3.5.22)-(3.5.30) και (3.7.15)-(3.7.19)

Τέλος, εισάγουμε μια νέα εξίσωση για να προσθέσουμε στην αντικειμενική συνάρτηση προκειμένου να περιορίσουμε τον αριθμό των αποσπώμενων μονάδων που είναι προσαρτημένες σε κάθε όχημα. Η εξίσωση αυτή διατυπώνεται ως εξής:

$$\sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A_k | i \in V^k \cup F \cup H} x_{i,j}^k \bar{k}_j^k \quad (3.7.29)$$

Ολοκληρώνουμε το βήμα γραμμικοποίησης χρησιμοποιώντας την ακέραια μεταβλητή  $\psi_{i,j}^k \in \mathbb{Z}$  ως εξής:

$$\psi_{ij}^k \leq x_{ij}^k M, \quad \forall k \in K, (i,j) \in A_k, i \in V^k \cup F \cup H \quad (3.7.30)$$

$$\psi_{ij}^k \geq -x_{ij}^k M, \quad \forall k \in K, (i,j) \in A_k, i \in V^k \cup F \cup H \quad (3.7.31)$$

$$\psi_{ij}^k \leq \bar{k}_j^k + (1 - x_{ij}^k) M, \quad \forall k \in K, (i,j) \in A_k, i \in V^k \cup F \cup H \quad (3.7.32)$$

$$\psi_{ij}^k \geq \bar{k}_j^k + (x_{ij}^k - 1) M, \quad \forall k \in K, (i,j) \in A_k, i \in V^k \cup F \cup H \quad (3.7.33)$$

Τέλος, η αντικειμενική συνάρτηση διατυπώνεται λαμβάνοντας υπόψη όλες τις διεργασίες ως εξής:

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A_k | i \in V^k \cup F \cup H} z_{ij}^k + m * \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A_k | i \in V^k \cup F \cup H} \psi_{ij}^k \quad (3.7.34)$$

με περιορισμούς προγραμματισμού οχημάτων (3.5.1)-(3.5.4),(3.5.9)-(3.5.11) και (3.7.1)-(3.7.8), περιορισμούς προγραμματισμού ηλεκτρικών οχημάτων (3.5.12)-(3.5.13),(3.7.9)-(3.7.14) και (3.5.16)-(3.5.20)

περιορισμούς αποσπώμενων μονάδων (3.5.22)-(3.5.30) και (3.7.15)-(3.7.19) και συναρτήσεις (3.7.29)-(3.7.33)

### 3.8 Έγκυρες ανισότητες

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε έγκυρες ανισότητες που περιορίζουν τον χώρο λύσεων, μειώνοντας έτσι το υπολογιστικό κόστος επιταχύνοντας τη σύγκλιση στη βέλτιστη λύση.

### 3.8.1 Αναγωγές συνόλων τόξων

Μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τους χρόνους διαδρομής μεταξύ των κόμβων και τα κατώτερα/ανώτερα χρονικά όρια της έναρξης κάθε εργασίας σε κάθε κόμβο για να μειώσουμε το σύνολο των εφικτών τόξων για κάθε όχημα  $k \in K$ . Αναλυτικότερα, το σύνολο  $A_3^k$  μπορεί να μειωθεί σε:

$$A_3^k = (i, j) \mid \forall i \in V^k, \forall j \in V^k - \{i\} \text{ έτσι ώστε } l_i + \tilde{t}_i + t_{ij} \leq u_j$$

αφαιρώντας όλα τα τόξα  $(i, j)$  για τα οποία ο χαμηλότερος δυνατός χρόνος έναρξης της εργασίας  $i$ ,  $(l_i)$ , συν το χρόνο ταξιδιού που απαιτείται για την ολοκλήρωση της εργασίας  $i$  και τη μετάβαση στην αρχή του κόμβου  $j$ ,  $(\tilde{t}_i + t_{ij})$ , είναι μεγαλύτερος από τον τελευταίο δυνατό χρόνο έναρξης της εργασίας  $j$ ,  $(u_j)$ . Το ίδιο ισχύει και για τα τόξα στο σύνολο  $A_4^k$  τα οποία ανάγονται σε:

$$A_4^k = (i, j) \mid \forall i \in V^k, \forall j \in F \text{ έτσι ώστε } l_i + \tilde{t}_i + t_{ij} \leq u_j$$

Επιπλέον, η εργασία που εκτελείται σε έναν κόμβο συμβάντος φόρτισης  $i \in F$  είναι μια εργασία φόρτισης που δεν μπορεί να διαρκέσει λιγότερο από 0 δευτερόλεπτα. Δηλαδή,

$$A_5^k = (i, j) \mid \forall i \in F, \forall j \in V^k \text{ έτσι ώστε } l_i + t_{ij} \leq u_j$$

Επειδή η εργασία στην αρχική αποθήκη  $o_k$  διαρκεί επίσης 0 δευτερόλεπτα, έχουμε επίσης:

$$A_1^k = (o_k, j) \mid \forall j \in N^k - \{o_k\} \text{ έτσι ώστε } l_{o_k} + t_{o_k j} \leq u_j$$

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το μειωμένο σύνολο τόξων:

$$A^k = \begin{cases} A_1^k = (o_k, j) \mid \forall j \in N^k - \{o_k\} \text{ έτσι ώστε } l_{o_k} + t_{o_k j} \leq u_j \\ A_2^k = (j, d_k) \mid \forall j \in N^k - \{o_k, d_k\} \\ A_3^k = (i, j) \mid \forall i \in V^k, \forall j \in V^k - \{i\} \text{ έτσι ώστε } l_i + \tilde{t}_i + t_{ij} \leq u_j \\ A_4^k = (i, j) \mid \forall i \in V^k, \forall j \in F \text{ έτσι ώστε } l_i + \tilde{t}_i + t_{ij} \leq u_j \\ A_5^k = (i, j) \mid \forall i \in F, \forall j \in V^k \text{ έτσι ώστε } l_i + t_{ij} \leq u_j \end{cases}$$

### 3.8.2 Αναγωγές SOC

Με το παρόν προτείνουμε περαιτέρω περιορισμούς ανισότητας που αποκλείουν τις μη εφικτές λύσεις από το χώρο λύσεων. Πρώτον, το SOC κάθε οχήματος  $k \in K$  κατά την άφιξη σε έναν κόμβο πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο με το μέγιστο SOC,  $\phi_{\max}^k$ :

$$e_j^k \leq \phi_{\max}^k \quad \forall k \in K, \forall j \in V^k \cup F \cup \{d_k\} \cup H$$

Επιπλέον, ένα όχημα  $k$  θα πρέπει να έχει αρκετό υπόλοιπο SOC μετά τη λειτουργία ενός τόξου  $(i, j) \in A_k$  για να το λειτουργήσει. Εάν το  $q_j$  είναι ο πλησιέστερος κόμβος φόρτισης από το

$j$ , αυτό σημαίνει ότι το SOC του οχήματος  $k$  κατά την αναχώρηση από το  $j$  θα πρέπει να είναι τέτοιο ώστε να του επιτρέπει να ταξιδέψει στο  $q_j$ . Εάν αυτό δεν συμβαίνει, η διέλευση του τόξου  $(i, j)$  είναι ανέφικτη επιλογή, διότι μετά την εκτέλεση μιας τέτοιας ενέργειας το εναπομείναν SOC του οχήματος δεν επαρκεί για να ταξιδέψει στον πλησιέστερο κόμβο φόρτισης. Αυτό εκφράζεται από τους ακόλουθους περιορισμούς ανισότητας που περιορίζουν περαιτέρω το χώρο λύσεων:

$$\bar{e}_j^k \geq \phi_{\min}^k + \theta_{j,q_j}(1 + \bar{k}_j^k) \quad \forall j \in K, \forall k \in V^k$$

Πιο αναλυτικά,  $\bar{e}_j^k \geq \phi_{\min}^k + \theta_{j,q_j}(1 + \bar{k}_j^k)$  διασφαλίζει ότι ακόμη και μετά την κατανάλωση της απαιτούμενης ενέργειας για την εκτέλεση της εργασίας  $j$ , το SOC του οχήματος  $k$ ,  $\bar{e}_j^k$ , επαρκεί για να επιτρέψει στο όχημα να ταξιδέψει στο πλησιέστερο σταθμό φόρτισης  $q_j$ .

### 3.8.3 Μειώσεις γεγονότων φόρτισης

Σημειώστε ότι η αριστερή πλευρά των περιορισμών της ανισότητας:

$$\sum_{k \in K} y_i^k (T_i^k + \tau_i^k) \leq T_{\omega_i}^k + M \left( 1 - \sum_{\rho: (\omega_i, \rho) \in A^k} x_{\omega_i \rho}^k \right) \quad \forall i \in F_0, \forall k \in K$$

έχει το κατώτερο όριο του:

$$\sum_{k \in K} y_i^k l_i$$

αφού

$$\sum_{k \in K} y_i^k (T_i^k + T_i^k) \geq \sum_{k \in K} y_i^k l_i \quad \text{για κάθε } i \in F_0.$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το κατώτερο όριο, το οποίο εκφράζει τον νωρίτερο δυνατό χρόνο αναχώρησης από τον φορτιστή ενός οχήματος που χρησιμοποιεί το γεγονός φόρτισης  $i$ , μπορούμε να προσθέσουμε τον ακόλουθο περιορισμό γραμμικής ανισότητας που περιορίζει περαιτέρω τον χώρο λύσεων:

$$\sum_{k \in K} y_i^k l_i \leq T_{\omega_i}^k + M \left( 1 - \sum_{\rho: (\omega_i, \rho) \in A^k} x_{\omega_i \rho}^k \right) \quad \forall i \in F_0, \forall k \in K$$

### 3.8.4 Μειώσεις του χρόνου έναρξης των υπηρεσιών

Επιπλέον, εισάγουμε περιορισμούς όσον αφορά τη σκοπιμότητα των χρόνων εκκίνησης στους κόμβους εργασιών. Συγκεκριμένα, εάν ο χρόνος έναρξης μιας εργασίας του κόμβου  $i$  είναι  $T_i^k$ , τότε το όχημα  $k$  δεν μπορεί να ταξιδέψει στον κόμβο εργασίας  $j$  εάν φτάσει εκεί αργά, π.χ.

μετά τον ανώτερο χρόνο  $u_j$ . Αυτό εκφράζεται με τις ακόλουθες τρεις έγκυρες ανισότητες που μειώνουν περαιτέρω το χώρο λύσεων:

$$T_i^k + \tilde{t}_i + t_{ij} \leq u_j + M(1 - x_{ij}^k) \quad \forall i \in V^k, j \in V^k \cup F \cup \{d_k\} - \{i\}$$

$$T_i^k + \tau_i + t_{ij} \leq u_j + M(1 - x_{ij}^k) \quad \forall i \in F, j \in V^k \cup \{d_k\}$$

$$T_i^k + \bar{t}_i^k + t_{ij} \leq u_j + M(1 - x_{ij}^k) \quad \forall i \in H, j \in V^k \cup F \cup \{d_k\}$$

Σημειώστε ότι ο όρος  $M(1 - x_{ij}^k)$  στις παραπάνω έγκυρες ανισότητες εξασφαλίζει ότι οι περιορισμοί εφαρμόζονται στα τόξα  $i, j$  που χρησιμοποιούνται από το όχημα  $k$ , δεδομένου ότι δεν χρειάζεται να επιβάλλουμε περιορισμούς σε αχρησιμοποίητα τόξα.

### 3.8.5 Αντιφατικές αναγωγές τόξων

Τέλος, σημειώνουμε ότι γειτονικά τόξα στο γράφημά μας  $G = \{N, A\}$  μπορεί να βρίσκονται σε σύγκρουση, πράγμα που σημαίνει ότι δεν μπορούν να αποτελούν μέρος της λύσης ταυτόχρονα. Για το σκοπό αυτό, επεκτείνουμε τον ορισμό των συγκρουόμενων τόξων που παρέχεται στους (Hadjar et al. (2006)), λαμβάνοντας υπόψη και τα εισερχόμενα/εξερχόμενα τόξα προς/από γεγονότα χρέωσης.

#### 3.8.5.1 Ορισμός

Έστω  $i, j, k$  και  $i', j', k'$  δύο γειτονικά τόξα του πολυγράμματος  $G$ . Λέμε ότι βρίσκονται σε σύγκρουση αν  $k = k'$  ή  $i = i'$  ή  $j = j'$ . Δηλαδή, βρίσκονται σε αντιπαράθεση εάν δεν μπορούν να εμφανιστούν σε μια εφικτή λύση της περίπτωσης EB-MDVSPTW.

Επειδή δεν μπορούν να εμφανιστούν σε μια εφικτή λύση του EB-MDVSPTW, αφαιρούμε αυτά τα τόξα χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες έγκυρες ανισότητες:

$$x_{ij}^k + x_{ij'}^{k'} \leq 1 \quad \forall k \in K, \forall k' \in K - \{k'\}, \forall (i, j) \in A_k \cap A_{k'}$$

$$x_{ij}^k + x_{i'j'}^k \leq 1 \quad \forall k \in K, \forall (i, j) \in A_k, (i', j') \in A_k, : i' = i \wedge j \neq j'$$

$$x_{ij}^k + x_{i'j'}^k \leq 1 \quad \forall k \in K, \forall (i, j) \in A_k, (i', j') \in A_k, i' \neq i \wedge j = j'$$





## Κεφάλαιο 4

# Εφαρμογή σε ιδεατό δίκτυο

---

4.1	Επεξήγηση Προβλήματος . . . . .	40
4.2	Παρουσίαση Αποτελεσμάτων . . . . .	43

---

## 4.1 Επεξήγηση Προβλήματος

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζουμε την εφαρμογή του μοντέλου μας σε ένα μικρό δίκτυο με ιδεατά δεδομένα (Toy Network). Παρουσιάζουμε αναλυτικά όλες τις εισόδους και εξόδους του μοντέλου μας βήμα προς βήμα. Σε αυτό το δίκτυο έχουμε 2 ηλεκτρικά οχήματα  $K = \{1, 2\}$  που ξεκινούν από δύο αποθήκες προέλευσης  $o_1, o_2$  και επιστρέφουν σε αποθήκες προορισμού  $d_1, d_2$ . Οι συντεταγμένες για τις αποθήκες προέλευσης  $o_1, o_2$  είναι οι ίδιες (677908, 6150220), ενώ οι συντεταγμένες για τις αποθήκες προορισμού  $d_1, d_2$  είναι διαφορετικές, (585053, 6140355) και (720134, 6210199) αντίστοιχα. Έχουμε επίσης ένα σύνολο 6 διαδρομών  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  τις οποίες πρέπει να ολοκληρώσουν τα 2 ηλεκτρικά οχήματα. Εισάγεται ένα σύνολο 4 φορτιστών σε διαφορετικές τοποθεσίες  $Z = \{1, 2, 3, 4\}$ , για να εκτελέσουν τα ηλεκτρικά οχήματα γεγονόςτα φόρτισης. Σε κάθε θέση φορτιστή μπορούν να πραγματοποιηθούν 2 γεγονότα φόρτισης, που παρουσιάζονται ως  $F = \{1001, 1011, 1002, 1012, 1022, 1003, 1013, 1004, 1014\}$ . Τέλος, κάθε διαδρομή συνδέεται με έναν αριθμό αποσπώμενων μονάδων που πρέπει να έχει συνδεδεμένο ένα ηλεκτρικό όχημα για να την εκτελέσει. Για να μπορέσει ένα ηλεκτρικό όχημα να προσαρτήσει ή να αποσυνδέσει αποσπώμενες μονάδες πρέπει να επισκεφθεί μια φυσική θέση αποθήκευσης με συντεταγμένες  $\{659304, 6130354\}$ . Εκεί μπορεί να λάβει χώρα ένας αριθμός γεγονότων σύζευξης/αποσύζευξης  $H = \{101, 102, 103, 104, 105\}$ .

Με αυτές τις πληροφορίες, το πλήρες σύνολο των κόμβων  $N$  διατυπώνεται ως εξής:

$$N = \{o_1, o_2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, d_1, d_2, 1001, 1011, 1002, 1012, 1003, 1013, 1004, 1014, 101, 102, 103, 104, 105\}.$$

και για κάθε όχημα ως :

$$N_1 = \{o_1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, d_1, 1001, 1011, 1002, 1012, 1003, 1013, 1004, 1014, 101, 102, 103, 104, 105\}$$

και

$$N_2 = \{o_2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, d_2, 1001, 1011, 1002, 1012, 1003, 1013, 1004, 1014, 101, 102, 103, 104, 105\}$$

Οι συντεταγμένες όλων των κόμβων εργασιών παρουσιάζονται στον πίνακα (4.1). Οι κόμβοι ταξιδιού  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  έχουν διαφορετικές συντεταγμένες θέσης προέλευσης και προορισμού που υποδηλώνουν τη θέση έναρξης και λήξης κάθε ταξιδιού. Οι αποθήκες αφετηρίας και προορισμού μαζί με τα γεγονότα φόρτισης και ζεύξης/αποζεύξης έχουν τις ίδιες συντεταγμένες θέσης αφετηρίας και προορισμού, επειδή το ηλεκτρικό όχημα παραμένει αδρανές όταν βρίσκεται σε αυτές τις θέσεις.

Οι χρόνοι ταξιδιού για κάθε ταξίδι  $\tilde{t}_i$  και η καταναλισκόμενη ενέργεια  $\eta_i$  κατά την εκτέλεση ενός

Task Node	Origin Location		Destination Location	
	Latitude	Longitude	Latitude	Longitude
$o_1$	677,908	6,150,220	677,908	6,150,220
$o_2$	677,908	6,150,220	677,908	6,150,220
$d_1$	585,053	6,140,355	585,053	6,140,355
$d_2$	720,134	6,210,199	720,134	6,210,199
1	538,181	6,086,484	720,415	6,176,264
2	538,181	6,086,484	720,415	6,176,264
3	528,913	6,152,557	710,831	6,168,718
4	528,913	6,152,557	710,831	6,168,718
5	538,181	6,086,484	720,415	6,176,264
6	528,913	6,152,557	710,831	6,168,718
1001	557,926	6,181,752	557,926	6,181,752
1011	557,926	6,181,752	557,926	6,181,752
1002	609,023	6,077,163	609,023	6,077,163
1012	609,023	6,077,163	609,023	6,077,163
1003	507,721	6,199,180	507,721	6,199,180
1013	507,721	6,199,180	507,721	6,199,180
1004	522,714	6,075,103	522,714	6,075,103
1014	522,714	6,075,103	522,714	6,075,103
101	659,304	6,130,354	659,304	6,130,354
102	659,304	6,130,354	659,304	6,130,354
103	659,304	6,130,354	659,304	6,130,354
104	659,304	6,130,354	659,304	6,130,354
105	659,304	6,130,354	659,304	6,130,354

Πίνακας 4.1: Συντεταγμένες Γεγονότων

$i \in V$	$\tilde{t}_i$	$\eta_i$	$w_i$
1	203.1494	264.0942	1
2	203.1494	264.0942	0
3	182.6344	237.4247	1
4	182.6344	237.4247	2
5	203.1494	264.0942	1
6	182.6344	237.4247	0

Πίνακας 4.2: Χρόνος ταξιδιού, καταναλισκόμενη ενέργεια για όχημα χωρίς αποσπώμενες μονάδες και αποσπώμενες μονάδες που απαιτούνται κατά την εκτέλεση κάθε διαδρομής  $i \in V$ .

Task Node	$l_i$	$u_i$	Task Node	$l_i$	$u_i$
$o_1$	0	20	1002	420	670
$o_2$	0	20	1012	640	870
$d_1$	800	6000	1003	40	1090
$d_2$	800	6000	1013	1040	3790
1	20	240	1004	440	1990
2	420	640	1014	1240	3890
3	40	260	101	0	6000
4	440	1060	102	0	6000
5	820	2820	103	0	6000
6	840	4840	104	0	6000
1001	20	270	105	0	6000
1011	220	470			

Πίνακας 4.3: Χρονικό περιθώριο για κάθε γεγονός.

ταξιδιού  $i \in V$  υπολογίζονται με βάση την ευκλείδεια απόσταση των συντεταγμένων της θέσης προέλευσης και προορισμού κάθε ταξιδιού. Παρουσιάζονται στον πίνακα (4.2). Παράλληλα, εμφανίζονται και οι απαιτήσεις σε αποσπώμενες μονάδες για κάθε ταξίδι.

Κάθε κόμβος έχει ένα χρονικό παράθυρο που πρέπει να εκτελεστεί αναμένοντας τα γεγονότα σύζευξης/αποσύζευξης. Για να επιτευχθεί αυτό, το χρονικό παράθυρο ορίζεται σε  $[l_i, u_i] = [0, 6000]$ , καθιστώντας τα γεγονότα σύζευξης/αποσύζευξης ικανά να ολοκληρωθούν οποιαδήποτε στιγμή εντός της περιόδου σχεδιασμού μας. Τα χρονικά παράθυρα για κάθε κόμβο παρουσιάζονται στον πίνακα (4.3).

Πρέπει επίσης να ορίσουμε ορισμένες πρόσθετες τιμές. Το μοναδιαίο κόστος αναμονής ενός οχήματος είναι  $\lambda=1$ . Η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της κατάστασης φόρτισης για κάθε όχημα ορίζεται ως  $[\phi_{min}^k, \phi_{max}^k] = [10, 1400]$ . Ο ρυθμός φόρτισης του φορτιστή είναι  $r=10$ . Το κόστος μετακίνησης και η κατανάλωση ενέργειας ορίζονται ως 10 και 1,2 ανά χιλιόμετρο μετακίνησης αντίστοιχα. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι τιμές αυτές κλιμακώνονται ανάλογα με τις προσαρτημένες αποσπώμενες μονάδες που διαθέτει ένα όχημα όταν ταξιδεύει μεταξύ κόμβων και εκτελεί ταξίδια.

## 4.2 Παρουσίαση Αποτελεσμάτων

Το παρουσιαζόμενο μεικτό ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα (MILP) προγραμματίζεται σε python 3.10.7. Επιλύεται με την έκδοση 11.0.2 του Gurobi Optimizer χρησιμοποιώντας branch-and-cut και dual simplex. Η συνολικά βέλτιστη λύση έχει κόστος 161,733 και προκύπτει:

Όχημα 1 που εξυπηρετεί την ακολουθία γεγονότων:

$$o_1 \rightarrow 101 \rightarrow 3 \rightarrow 104 \rightarrow 1002 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 1014 \rightarrow 102 \rightarrow 5 \rightarrow d_1$$

Όχημα 2 που εξυπηρετεί την ακολουθία γεγονότων:

$$o_2 \rightarrow 103 \rightarrow 1 \rightarrow 1012 \rightarrow 105 \rightarrow 1003 \rightarrow 4 \rightarrow d_2$$

Για τη συγκεκριμένη ακολουθία διαδρομών, ο χρόνος έναρξης κάθε υπηρεσίας σε κάθε κόμβο  $i \in N$  παρουσιάζεται στον (4.4) για το όχημα  $k = 1$  και στον (4.5) για το όχημα  $k = 2$ . Μπορεί να παρατηρηθεί ότι κάθε φορά  $T_i^k$  που ξεκινά μια υπηρεσία σέβεται τα χρονικά παράθυρα που έχουν οριστεί. Η ενέργεια  $e_i^k, \bar{e}_i^k$  που έχει κάθε όχημα όταν φτάνει ή φεύγει από έναν κόμβο είναι πάντα εντός των ορίων SOC  $[\phi_{min}^k, \phi_{max}^k] = [10, 1400]$  που έχουν καθοριστεί. Για τα συμβάντα φόρτισης, για τον φορτιστή 2 χρησιμοποιούνται και τα δύο συμβάντα φόρτισης, ένα για κάθε όχημα. Λόγω των περιορισμών μας, είναι εγγυημένο ότι τα δύο οχήματα δεν θα χρησιμοποιήσουν ταυτόχρονα τον ίδιο φορτιστή. Αυτό μπορεί να παρατηρηθεί από τον χρόνο  $T_i^k$  που ξεκινά η εξυπηρέτηση σε έναν φορτιστή και τον χρόνο  $\tau_i^k$  που χρειάζεται το συμβάν φόρτισης για να ολοκληρωθεί.  $T_{1002}^1 + \tau_{1002}^1 \leq T_{1012}^2$  αφού  $499.554 + 51.5218 \leq 640$ . Τέλος, παρουσιάζονται οι σπονδυλωτές μονάδες που συνδέονται με ένα όχημα κατά την άφιξη σε έναν κόμβο  $\bar{k}_i^k$  μαζί με την απαίτηση σπονδυλωτών μονάδων για κάθε ταξίδι  $w_i$ . Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι συμβαίνουν τα κατάλληλα γεγονότα σύζευξης/αποσύζευξης, ώστε οι αποσπώμενες μονάδες που είναι προσαρτημένες σε ένα όχημα να αντιστοιχούν πάντα στην απαιτούμενη ποσότητα για την εκτέλεση ενός ταξιδιού.

	$o_1$	<b>101</b>	<b>3</b>	<b>104</b>	<b>1002</b>	<b>2</b>	<b>6</b>	<b>1014</b>	<b>102</b>
$l_i$	0	0	40	0	420	420	840	1240	0
$T_i^k$	0	27.217	169.485	416.36	499.554	622.529	1018.64	1411.4	1610.36
$u_i$	20	6000	260	6000	670	640	4840	3890	6000
$e_i^k$	-	1367.34	1049.9	457.397	369.563	1314.26	838.921	367.612	1223.19
$\bar{e}_i^k$	1400	1367.34	611.574	457.397	1400	1070.48	619.76	1400	1223.19
$\tau_i^k$	-	-	-	-	51.5218	-	-	51.6194	-
$w_i$	-	-	1	-	-	0	0	-	-
$\bar{k}_i^k$	0	0	1	1	0	0	0	0	0
	<b>5</b>	$d_1$							
$l_i$	820	800							
$T_i^k$	1749.18	2092.38							
$u_i$	2820	6000							
$e_i^k$	914.015	90.3509							
$\bar{e}_i^k$	426.457	-							
$\tau_i^k$	-	-							
$w_i$	1	-							
$\bar{k}_i^k$	1	1							

Πίνακας 4.4: Χρόνος  $T_i^k$  που αρχίζει κάθε γεγονός, ενέργεια  $e_i^k$ ,  $\bar{e}_i^k$  και απαίτηση αποσπώμενης μονάδας  $w_i$ ,  $\bar{k}_i^k$  για κάθε κόμβο  $i \in N$  που επισκέπτεται το όχημα  $k = 1$ .

	$o_2$	<b>103</b>	<b>1</b>	<b>1012</b>	<b>105</b>	<b>1003</b>	<b>4</b>	$d_2$
$l_i$	0	0	20	640	0	40	440	800
$T_i^k$	20	101.177	240	640	772.556	949.032	1038.99	1264.14
$u_i$	20	6000	240	870	6000	1090	1060	6000
$e_i^k$	-	1367.34	1058.16	212.779	1224.33	625.017	1215.63	405.107
$\bar{e}_i^k$	1400	1367.34	570.606	1400	1224.33	1400	558.148	-
$\tau_i^k$	-	-	-	59.3611	-	38.7491	-	-
$w_i$	-	-	1	-	-	-	2	-
$\bar{k}_i^k$	0	0	1	1	1	2	2	2

Πίνακας 4.5: Χρόνος  $T_i^k$  που αρχίζει κάθε γεγονός, ενέργεια  $e_i^k$ ,  $\bar{e}_i^k$  και απαίτηση αποσπώμενης μονάδας  $w_i$ ,  $\bar{k}_i^k$  για κάθε κόμβο  $i \in N$  που επισκέπτεται το όχημα  $k = 2$ .





## Κεφάλαιο 5

# Υπολογιστικά αποτελέσματα

---

5.1	Επεξήγηση Κατάστρωσης προβλήματος . . . . .	48
5.2	Αποτελέσματα προβλήματος . . . . .	48
5.2.1	1η Περίπτωση . . . . .	49
5.2.2	2η Περίπτωση . . . . .	49
5.2.3	3η Περίπτωση . . . . .	50
5.2.4	4η Περίπτωση . . . . .	50
5.2.5	5η Περίπτωση . . . . .	51
5.2.6	6η Περίπτωση . . . . .	51
5.2.7	Σύγκριση Αποτελεσμάτων Διαφορετικών περιπτώσεων . . . . .	53
5.3	Περιορισμοί έρευνας . . . . .	54

---

## 5.1 Επεξήγηση Κατάστρωσης προβλήματος

Σε αυτή την ενότητα πραγματοποιούνται υπολογιστικά πειράματα για μεγαλύτερες περιπτώσεις. Παρουσιάζεται ένα σύνολο περιπτώσεων αναφοράς EB-MDVSPTW που χρησιμοποιούνται επίσης στο (Gkiotsalitis et al. (2023)). Αυτά τροποποιούνται προκειμένου να ληφθεί υπόψη η πρόσθετη πολυπλοκότητα που εισάγεται με τη διατύπωση του σχεδιασμού για αποσπώμενες μονάδες. Οι αποθήκες και τα σημεία εκκίνησης και τερματισμού των ταξιδιών κατανομονται σε ένα τετράγωνο 60km επί 60km στο ευκλείδειο επίπεδο χρησιμοποιώντας μια ομοιόμορφη κατανομή. Οι χρόνοι ταξιδιού μεταξύ των κόμβων, σε λεπτά, είναι ίσοι με τις ευκλείδειες αποστάσεις μεταξύ των κόμβων. Το κόστος του χρόνου αναμονής είναι 2 μονάδες ανά λεπτό και το κόστος του χρόνου ταξιδιού λαμβάνεται ίσο με 10 μονάδες ανά λεπτό. Έτσι, το κόστος για τη μετακίνηση μεταξύ δύο κόμβων διατυπώνεται ως  $b_{ijk} = 10t_{ij}$  για μηδενικές αποσπώμενες μονάδες προσαρτημένες σε ένα όχημα. Όταν προσαρτώνται αποσπώμενες μονάδες σε ένα συγκεκριμένο όχημα, το κόστος ταξιδιού μεταξύ δύο κόμβων προσαρμόζεται δυναμικά στη διατύπωση με την παραδοχή μιας γραμμικής αύξησης, με βάση τις προσαρτημένες αποσπώμενες μονάδες. Χρησιμοποιούνται δύο οχήματα που πρέπει να εκτελέσουν ένα σύνολο οκτώ διαδρομών. Το μέγιστο SOC για κάθε εν λόγω όχημα είναι 500 και η κατανάλωση ενέργειας είναι 1,2 ανά χιλιόμετρο. Οι τιμές αυτές προσαρμόζονται από την αρχική μελέτη προκειμένου να ληφθεί υπόψη η νέα διατύπωση που λαμβάνει υπόψη την πρόσθετη κατανάλωση ενέργειας κάθε οχήματος με βάση τις προσαρτημένες αποσπώμενες μονάδες. Τέλος, ο ρυθμός φόρτισης για όλους τους φορτιστές και τα γεγονότα φόρτισης είναι 10.

Στον (5.1) παρουσιάζονται ο αριθμός των διαδρομών, ο αριθμός των αποθηκών, ο αριθμός των σταθμών, ο αριθμός των γεγονότων φόρτισης, ο αριθμός των αποσπώμενων μονάδων αποθήκευσης, ο αριθμός των γεγονότων σύζευξης/αποσύζευξης καθώς και ο αριθμός των παραγόμενων περιπτώσεων. Επιλύεται με την έκδοση 11.0.2 του Gurobi Optimizer χρησιμοποιώντας branch-and-cut και dual simplex. Όλα τα πειράματα πραγματοποιήθηκαν σε συμβατικό υπολογιστή με 32GB RAM και επεξεργαστή AMD Ryzen™ 7 5800X3D @ 3.40GHz. Τα κριτήρια τερματισμού του επιλυτή ήταν είτε η σύγκλιση στη συνολικά βέλτιστη λύση είτε η επίτευξη ενός ορίου υπολογιστικού χρόνου έξι ωρών.

Name	Vehicles	Depots	Chargers	Charging Events	Coupling\ Uncoupling Events	Modular Units Storage	Trips	Instances
D2_S2_C8	2	2	4	8	5	1	8	5

Πίνακας 5.1: Περιπτώσεις(instances) του προβλήματος EB-MDVSPTW.

## 5.2 Αποτελέσματα προβλήματος

Σε αυτά τα αριθμητικά πειράματα χρησιμοποιούμε διαφορετικούς συνδυασμούς απαιτήσεων αποσπώμενων μονάδων για κάθε ταξίδι. Στους πίνακες (5.2), (5.4), (5.6), (5.8), (5.10), (5.12) παρουσιάζονται οι διαφορετικοί συνδυασμοί αποσπώμενων μονάδων και στους πίνακες (5.3),

(5.5), (5.7), (5.9), (5.11), (5.13) παρουσιάζονται τα υπολογιστικά αποτελέσματα για κάθε συνδυασμό απαιτήσεων αποσπώμενων μονάδων αντίστοιχα. Σε καθέναν από τους έξι πίνακες (5.3), (5.5), (5.7), (5.9), (5.11), (5.13) Παρουσιάζονται 5 περιπτώσεις. Για κάθε περίπτωση παρουσιάζονται ο αριθμός των περιορισμών (CNS), ο αριθμός των κόμβων που εξερευνήθηκαν στο ριζωμένο δέντρο (NE), ο αριθμός των επαναλήψεων simplex (SI), ο υπολογιστικός χρόνος (CT) σε λεπτά, η απόδοση της λύσης (SP) και το κενό βελτιστότητας (OG). Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα, δίνουμε έμφαση στην απόδοση της λύσης. Συγκρίνοντας τις επιδόσεις επίλυσης των περιπτώσεων με όλα τα ταξίδια που έχουν απαίτηση 2 αποσπώμενων μονάδων με εκείνες με τυχαία αποδιδόμενες απαιτήσεις αποσπώμενων μονάδων, μπορούμε κυρίως να παρατηρήσουμε μείωση της μέσης επίδοσης επίλυσης που μεταφράζεται σε μείωση του μέσου κόστους εργασιών. Αυτό, ωστόσο, δεν είναι καθολικό. Οι διαφορετικές απαιτήσεις αποσπώμενων μονάδων αναγκάζουν τα οχήματα να εκτελούν πρόσθετα ταξίδια προς την αποθήκη σύζευξης/αποσύζευξης και να μην εκτελούν πάντα τα ταξίδια με τον πιο αποδοτικό τρόπο. Αυτό μπορεί να παρατηρηθεί σε ορισμένες περιπτώσεις επειδή το κόστος απόδοσης αυξάνεται ενώ οι αποσπώμενες μονάδες που συνδέονται στο όχημα είναι λιγότερες από δύο και έτσι μειώνεται η κατανάλωση ενέργειας και το κόστος λειτουργίας. Τέλος, παρουσιάζεται ο συγκριτικός πίνακας (5.14) για να εμφανιστεί η επίδραση της διαφορετικής ανάθεσης αποσπώμενων μονάδων σε μεμονωμένες περιπτώσεις.

### 5.2.1 1η Περίπτωση

		Trips							
		1	2	3	4	5	6	7	8
$w_i$		2	2	2	2	2	2	2	2

Πίνακας 5.2: Απαίτηση αποσπώμενων μονάδων για το ταξίδι  $i \in V$ .

Instance	CNS	NE	SI	CT	SP	OG
D2_S2_C8_a	41,475	104,283	7,910,856	6.14	7466.02	0.0000%
D2_S2_C8_b	41,311	1,048,528	92,296,714	28.72	6098.74	0.0000%
D2_S2_C8_c	41,311	592,804	34,717,344	15.66	5730.11	0.0000%
D2_S2_C8_d	41,311	636,010	32,472,885	16.93	5846.08	0.0000%
D2_S2_C8_e	41,283	175,922	11,138,420	8.75	5947.23	0.0000%
<b>Average</b>				15.24	6217.64	

Πίνακας 5.3: Αποτελέσματα για περίπτωση(instance) με 8 δρομολόγια(trips). CNS: Περιορισμοί, NE: B&B Διερευνούντες Κόμβοι, SI: Προσεγγίσεις Simplex, CT: Χρόνος υπολογισμού σε λεπτά, SP: Απόδοση λύσης, OG: Χάσμα βέλτιστης λειτουργίας.

### 5.2.2 2η Περίπτωση

		Trips							
		1	2	3	4	5	6	7	8
$w_i$		2	1	2	0	1	2	1	0

Πίνακας 5.4: Απαίτηση αποσπώμενων μονάδων για το ταξίδι  $i \in V$ .

Instance	CNS	NE	SI	CT	SP	OG
D2_S2_C8_a	41,475	2,731,864	186,843,484	93.13	6010.35	0.0000%
D2_S2_C8_b	41,311	1,525,065	106,058,631	68.10	5124.49	0.0000%
D2_S2_C8_c	41,311	573,481	48,094,305	22.94	5890.83	0.0000%
D2_S2_C8_d	41,311	244,887	20,614,731	14.55	5106.70	0.0000%
D2_S2_C8_e	41,283	272,607	38,039,628	18.00	5669.81	0.0000%
<b>Average</b>				43.34	5560.436	

Πίνακας 5.5: Αποτελέσματα για περίπτωση(instance) με 8 δρομολόγια(trips). CNS: Περιορισμοί, NE: B&B Διερευνούντες Κόμβοι, SI: Προσεγγίσεις Simplex, CT: Χρόνος υπολογισμού σε λεπτά, SP: Απόδοση λύσης, OG: Χάσμα βέλτιστης λειτουργίας.

### 5.2.3 3η Περίπτωση

	Trips							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$w_i$	1	0	2	2	1	1	0	2

Πίνακας 5.6: Απαίτηση αποσπώμενων μονάδων για το ταξίδι  $i \in V$ .

Instance	CNS	NE	SI	CT	SP	OG
D2_S2_C8_a	41,475	371,493	30,036,693	13.69	7101.58	0.0000%
D2_S2_C8_b	41,311	101,256	9,407,508	9.02	4742.61	0.0000%
D2_S2_C8_c	41,311	935,400	111,438,357	38.20	6774.62	0.0000%
D2_S2_C8_d	41,311	698,490	38,624,557	18.90	7267.43	0.0000%
D2_S2_C8_e	41,283	719,465	53,085,538	23.70	8424.08	0.0000%
<b>Average</b>				20.70	6862.064	

Πίνακας 5.7: Αποτελέσματα για περίπτωση(instance) με 8 δρομολόγια(trips). CNS: Περιορισμοί, NE: B&B Διερευνούντες Κόμβοι, SI: Προσεγγίσεις Simplex, CT: Χρόνος υπολογισμού σε λεπτά, SP: Απόδοση λύσης, OG: Χάσμα βέλτιστης λειτουργίας.

### 5.2.4 4η Περίπτωση

	Trips							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$w_i$	1	1	2	2	0	0	1	1

Πίνακας 5.8: Απαίτηση αποσπώμενων μονάδων για το ταξίδι  $i \in V$ .

Instance	CNS	NE	SI	CT	SP	OG
D2_S2_C8_a	41,475	1,006,336	119,557,867	72.68	6954.27	0.0000%
D2_S2_C8_b	41,311	251,853	27,716,888	11.67	4888.43	0.0000%
D2_S2_C8_c	41,311	1,007,758	94,021,802	33.41	6382.77	0.0000%
D2_S2_C8_d	41,311	646,651	60,267,927	20.72	5415.29	0.0000%
D2_S2_C8_e	41,283	3,557,423	489,522,322	331.48	5434.81	0.0000%
<b>Average</b>				93.99	5815.11	

Πίνακας 5.9: Αποτελέσματα για περίπτωση(instance) με 8 δρομολόγια(trips). CNS: Περιορισμοί, NE: B&B Διερευνούντες Κόμβοι, SI: Προσεγγίσεις Simplex, CT: Χρόνος υπολογισμού σε λεπτά, SP: Απόδοση λύσης, OG: Χάσμα βέλτιστης λειτουργίας.

### 5.2.5 5η Περίπτωση

	Trips							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$w_i$	2	2	2	0	1	2	1	0

Πίνακας 5.10: Απαίτηση αποσπώμενων μονάδων για το ταξίδι  $i \in V$ .

Instance	CNS	NE	SI	CT	SP	OG
D2_S2_C8_a	41,475	30,305	3,075,303	2.58	6255.18	0.0000%
D2_S2_C8_b	41,311	114,350	11,655,365	7.63	6050.71	0.0000%
D2_S2_C8_c	41,311	739,874	55,630,284	23.51	6372.09	0.0000%
D2_S2_C8_d	41,311	699,751	59,682,707	23.15	5154.14	0.0000%
D2_S2_C8_e	41,283	568,800	51,982,484	18.73	7405.57	0.0000%
<b>Average</b>				15.12	5905.37	

Πίνακας 5.11: Αποτελέσματα για περίπτωση(instance) με 8 δρομολόγια(trips). CNS: Περιορισμοί, NE: B&B Διερευνούντες Κόμβοι, SI: Προσεγγίσεις Simplex, CT: Χρόνος υπολογισμού σε λεπτά, SP: Απόδοση λύσης, OG: Χάσμα βέλτιστης λειτουργίας.

### 5.2.6 6η Περίπτωση

	Trips							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$w_i$	0	2	1	1	0	2	1	2

Πίνακας 5.12: Απαίτηση αποσπώμενων μονάδων για το ταξίδι  $i \in V$ .

<b>Instance</b>	<b>CNS</b>	<b>NE</b>	<b>SI</b>	<b>CT</b>	<b>SP</b>	<b>OG</b>
D2_S2_C8_a	41,475	341,794	28,759,967	18.08	8063.53	0.0000%
D2_S2_C8_b	41,311	570,800	11,655,365	24.52	6926.96	0.0000%
D2_S2_C8_c	41,311	972,472	90,160,955	53.48	6595.00	0.0000%
D2_S2_C8_d	41,311	3,628,641	308,299,090	244.59	5249.74	0.0009%
D2_S2_C8_e	41,283	552,609	54,750,771	33.23	5639.16	0.0003%
<b>Average</b>				74.78	6494.878	

Πίνακας 5.13: Αποτελέσματα για περίπτωση(instance) με 8 δρομολόγια(trips). CNS: Περιορισμοί, NE: B&B Διερευνούντες Κόμβοι, SI: Προσεγγίσεις Simplex, CT: Χρόνος υπολογισμού σε λεπτά, SP: Απόδοση λύσης, OG: Χάσμα βέλτιστης λειτουργίας.

## 5.2.7 Σύγκριση Αποτελεσμάτων Διαφορετικών περιπτώσεων

Instance	CNS	NE	SI	CT	SP	OG	SP Percentage Difference
<b>D2_S2_C8_a</b>	<b>41,475</b>	<b>104,283</b>	<b>7,910,856</b>	<b>6.14</b>	<b>7466.02</b>	<b>0.0000%</b>	
D2_S2_C8_a	41,475	2,731,864	186,843,484	93.13	6010.35	0.0000%	80.50%
D2_S2_C8_a	41,475	371,493	30,036,693	13.69	7101.58	0.0000%	95.12%
D2_S2_C8_a	41,475	1,006,336	119,557,867	72.68	6954.27	0.0000%	93.15%
D2_S2_C8_a	41,475	30,305	3,075,303	2.58	6255.18	0.0000%	83.78%
D2_S2_C8_a	41,475	341,794	28,759,967	18.08	8063.53	0.0000%	108.00%
<b>Average</b>							<b>92.11%</b>
<b>D2_S2_C8_b</b>	<b>41,311</b>	<b>1,048,528</b>	<b>92,296,714</b>	<b>28.72</b>	<b>6098.74</b>	<b>0.0000%</b>	
D2_S2_C8_b	41,311	1,525,065	106,058,631	68.10	5124.49	0.0000%	84.03%
D2_S2_C8_b	41,311	101,256	9,407,508	9.02	4742.61	0.0000%	77.76%
D2_S2_C8_b	41,311	251,853	27,716,888	11.67	4888.43	0.0000%	80.15%
D2_S2_C8_b	41,311	114,350	11,655,365	7.63	6050.71	0.0000%	99.21%
D2_S2_C8_b	41,311	570,800	11,655,365	24.52	6926.96	0.0000%	113.58%
<b>Average</b>							<b>90.95%</b>
<b>D2_S2_C8_c</b>	<b>41,311</b>	<b>592,804</b>	<b>34,717,344</b>	<b>15.66</b>	<b>5730.11</b>	<b>0.0000%</b>	
D2_S2_C8_c	41,311	573,481	48,094,305	22.94	5890.83	0.0000%	102.80%
D2_S2_C8_c	41,311	935,400	111,438,357	38.20	6774.62	0.0000%	118.23%
D2_S2_C8_c	41,311	1,007,758	94,021,802	33.41	6382.77	0.0000%	111.39%
D2_S2_C8_c	41,311	739,874	55,630,284	23.51	6372.09	0.0000%	111.20%
D2_S2_C8_c	41,311	972,472	90,160,955	53.48	6595.00	0.0000%	115.09%
<b>Average</b>							<b>111.74%</b>
<b>D2_S2_C8_d</b>	<b>41,311</b>	<b>636,010</b>	<b>32,472,885</b>	<b>16.93</b>	<b>5846.08</b>	<b>0.0000%</b>	
D2_S2_C8_d	41,311	244,887	20,614,731	14.55	5106.70	0.0000%	87.35%
D2_S2_C8_d	41,311	698,490	38,624,557	18.90	7267.43	0.0000%	124.31%
D2_S2_C8_d	41,311	646,651	60,267,927	20.72	5415.29	0.0000%	92.63%
D2_S2_C8_d	41,311	699,751	59,682,707	23.15	5154.14	0.0000%	88.16%
D2_S2_C8_d	41,311	3,628,641	308,299,090	244.59	5249.74	0.0009%	89.80%
<b>Average</b>							<b>96.45%</b>
<b>D2_S2_C8_e</b>	<b>41,283</b>	<b>175,922</b>	<b>11,138,420</b>	<b>8.75</b>	<b>5947.23</b>	<b>0.0000%</b>	
D2_S2_C8_e	41,283	272,607	38,039,628	18.00	5669.81	0.0000%	95.34%
D2_S2_C8_e	41,283	719,465	53,085,538	23.70	8424.08	0.0000%	141.65%
D2_S2_C8_e	41,283	3,557,423	489,522,322	331.48	5434.81	0.0000%	91.38%
D2_S2_C8_e	41,283	568,800	51,982,484	18.73	7405.57	0.0000%	124.52%
D2_S2_C8_e	41,283	552,609	54,750,771	33.23	5639.16	0.0003%	94.82%
<b>Average</b>							<b>109.54%</b>

Πίνακας 5.14: Συγκριτικός πίνακας αποτελεσμάτων κάθε περίπτωσης(instance). CNS: Περιορισμοί, NE: B&B Διερευνούντες Κόμβοι, SI: Προσεγγίσεις Simplex, CT: Χρόνος υπολογισμού σε λεπτά, SP: Απόδοση λύσης, OG: Χάσμα βέλτιστης λειτουργίας.

### 5.3 Περιορισμοί έρευνας

Ενώ ο σχεδιασμός λεωφορείων με αποσπώμενες μονάδες μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μείωση του συνολικού κόστους λειτουργίας, υπάρχουν περιορισμοί σε αυτή τη μέθοδο. Πρώτον, τα οχήματα αυτά, λόγω του καινοτόμου χαρακτήρα τους, είναι επί του παρόντος πολύ ακριβά σε σύγκριση με τα συμβατικά ηλεκτρικά οχήματα. Παράλληλα με τη φόρτιση, τα οχήματα αυτά απαιτούν επιπλέον χώρο για την αποθήκευση των αποσπώμενων μονάδων και την πρόσβαση σε αυτές κατά τη διάρκεια της λειτουργίας. Επίσης, χρειάζεται να εκπαιδευτεί επιπλέον ανθρώπινο δυναμικό προκειμένου να εκτελούνται τα γεγονότα συζεύξης στα απαραίτητα χρονικά πλαίσια. Όσον αφορά την τρέχουσα διατύπωση του μοντέλου, τα αποτελέσματα των δοκιμών έχουν αυξημένη πολυπλοκότητα σε σύγκριση με την αρχική μελέτη (Gkiotsalitis et al. (2023)). Αυτό περιορίζει το πλήθος των ταξιδιών από δέκα σε οκτώ, προκειμένου να ληφθούν υπόψη οι αυξημένοι υπολογιστικοί χρόνοι. Ο αριθμός των περιορισμών σχεδόν διπλασιάζεται, ενώ παράλληλα μειώνεται ο αριθμός των ταξιδιών λόγω της πρόσθετης πολυπλοκότητας του προβλήματος.



## Κεφάλαιο 6

# Συμπεράσματα

Ο σχεδιασμός λεωφορείων με αποσπώμενες μονάδες είναι μια νέα και καινοτόμος τεχνολογία για την προσαρμογή στις δημόσιες μεταφορές. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά για τη μείωση του κόστους λειτουργίας, ενώ παράλληλα συμβάλλει στην ικανοποίηση της ζήτησης επιβατών σε ώρες υψηλότερης και χαμηλότερης κίνησης. Ο σχεδιασμός λεωφορείων με αποσπώμενες μονάδες σε συνδυασμό με τα ηλεκτρικά οχήματα μπορεί να προσφέρει μια πολύ πιο φιλική προς το περιβάλλον και καινοτόμα προσέγγιση στο σχεδιασμό των δημόσιων μεταφορών.

Η παρούσα μελέτη αποσκοπεί στην προσαρμογή των λεωφορείων με αποσπώμενες μονάδες στο υπάρχον EB-MDVSPTW από (Gkiotsalitis et al. (2023)). Κατασκευάζεται μια νέα διατύπωση του προβλήματος και στη συνέχεια παρουσιάζεται σε ένα δίκτυο με ιδεατά δεδομένα (Toy Network). Στη συνέχεια δοκιμάζεται, σε διάφορες περιπτώσεις χρησιμοποιώντας διαφορετικό συνδυασμό απαιτήσεων αποσπώμενων μονάδων για κάθε ταξίδι. Συγκρίνουμε τα αποτελέσματα κάθε περίπτωσης, προκειμένου να δείξουμε την αποτελεσματικότητα της νέας τεχνολογίας.

Οι πρόσθετοι περιορισμοί εισάγουν ένα νέο επίπεδο πολυπλοκότητας στο EB-MDVSPTW. Τα συμβάντα σύζευξης/αποσύζευξης δεν έχουν περιορισμούς χρονικού παραθύρου και μπορούν να εκτελεστούν μόνο σε μία φυσική θέση στην τρέχουσα διατύπωση. Η θέση αποθήκευσης μπορεί να επηρεάσει το κόστος υπολογισμού και το χρόνο κάθε περίπτωσης. Επιπλέον, οι διαφορετικοί συνδυασμοί αποσπώμενων μονάδων μπορούν επίσης να επηρεάσουν το κόστος και το χρόνο υπολογισμού, όπως φαίνεται στο (5.14). Ανάλογα με τα δεδομένα εισόδου μπορούμε να παρατηρήσουμε αύξηση ή μείωση του κόστους αλλά ακόμη και συνδυασμό των δύο ανάλογα με την περίπτωση που επιλέγουμε.

Το προτεινόμενο μεικτό ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα επιλύεται με στόχο τη συνολική βελτιστοποίηση με τη χρήση ενός έτοιμου επιλυτή. Μπορεί να επεκταθεί περαιτέρω με διάφορους τρόπους. Η αποθήκη των αποσπώμενων μονάδων μπορεί να χωριστεί σε πολλαπλές τοποθεσίες και ακόμη και να συνδυαστεί με τις υπάρχουσες θέσεις φορτιστών για να παρέχει πιο αποτελεσματικές λύσεις. Οι αποθήκες προέλευσης μπορούν επίσης να τροποποιηθούν ώστε να επιτρέπουν σε ένα όχημα να ξεκινά τις διαδρομές του με τον βέλτιστο αριθμό προσαρτημένων αποσπώμενων μονάδων. Τέλος, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ευρετικές (heuristic) ή μεταευρετικές (metaheuristic) προσεγγίσεις για να μειωθούν οι υπολογιστικοί χρόνοι και να προσαρμοστεί το μοντέλο για μεγαλύτερο αριθμό διαδρομών και οχημάτων.



# Βιβλιογραφία

- S. Abraham, K. Ganesh, A. S. Kumar, and Y. Ducqd. Impact on climate change due to transportation sector – research prospective. *Procedia Engineering*, 38:3869–3879, 2012. ISSN 1877-7058, doi <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2012.06.445>, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705812023582>. International Conference on Modelling Optimization and Computing.
- A. A. Bertossi, P. Carraresi, and G. Gallo. On some matching problems arising in vehicle scheduling models. *Networks*, 17(3):271–281, 1987, doi <https://doi.org/10.1002/net.3230170303>, URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/net.3230170303>.
- L. Bodin and B. Golden. Classification in vehicle routing and scheduling. *Networks*, 11(2):97–108, 1981, doi <https://doi.org/10.1002/net.3230110204>, URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/net.3230110204>.
- S. Bunte and N. Kliwer. An overview on vehicle scheduling models. *Public Transport*, 1(4):299–317, Nov 2009. ISSN 1613-7159, doi 10.1007/s12469-010-0018-5, URL <https://link.springer.com/article/10.1007/s12469-010-0018-5>.
- G. Carpaneto, M. Dell’amico, M. Fischetti, and P. Toth. A branch and bound algorithm for the multiple depot vehicle scheduling problem. *Networks*, 19(5):531–548, 1989, doi <https://doi.org/10.1002/net.3230190505>, URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/net.3230190505>.
- J. R. Daduna and J. M. Pinto Paixão. Vehicle scheduling for public mass transit — an overview. In J. R. Daduna, I. Branco, and J. M. P. Paixão, editors, *Computer-Aided Transit Scheduling*, pages 76–90, Berlin, Heidelberg, 1995. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-642-57762-8, doi [https://doi.org/10.1007/978-3-642-57762-8\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-57762-8_6), URL [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-57762-8\\_6](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-57762-8_6).
- I. Dakic, K. Yang, M. Menendez, and J. Y. Chow. On the design of an optimal flexible bus dispatching system with modular bus units: Using the three-dimensional macroscopic fundamental diagram. *Transportation Research Part B: Methodological*, 148:38–59, 2021. ISSN 0191-2615, doi <https://doi.org/10.1016/j.trb.2021.04.005>, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S019126152100062X>.
- G. B. Dantzig and D. R. Fulkerson. Minimizing the number of tankers to meet a fixed schedule. *Naval Research Logistics Quarterly*, 1

- (3):217–222, September 1954, doi [10.1002/nav.3800010309](https://doi.org/10.1002/nav.3800010309), URL <https://ideas.repec.org/a/wly/navlog/v1y1954i3p217-222.html>.
- G. Desaulniers, F. Errico, S. Irnich, and M. Schneider. Exact algorithms for electric vehicle-routing problems with time windows. *Oper. Res.*, 64(6):1388–1405, Dec. 2016, doi <https://doi.org/10.1287/opre.2016.1535>, URL <https://pubsonline.informs.org/doi/10.1287/opre.2016.1535>.
- R. P. Dilworth. A decomposition theorem for partially ordered sets. *Annals of Mathematics*, 51(1):161–166, 1950. ISSN 0003486X, URL <http://www.jstor.org/stable/1969503>.
- T. Eiró, L. M. Martínez, and J. M. Viegas. Configuration of innovative minibus service in the lisbon, portugal, municipality: Spatial-temporal assessment. *Transportation Research Record*, 2217(1):127–135, 2011, doi <https://doi.org/10.3141/2217-16>, URL <https://journals.sagepub.com/doi/10.3141/2217-16>.
- G. Falchetta and M. Noussan. Electric vehicle charging network in europe: An accessibility and deployment trends analysis. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 94:102813, 2021. ISSN 1361-9209, doi <https://doi.org/10.1016/j.trd.2021.102813>, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1361920921001164>.
- R. Freling, A. P. M. Wagelmans, and J. M. P. Paixão. Models and Algorithms for Single-Depot Vehicle Scheduling. *Transportation Science*, 35(2):165–180, May 2001, doi [10.1287/trsc.35.2.165.101](https://doi.org/10.1287/trsc.35.2.165.101), URL <https://ideas.repec.org/a/inm/ortrsc/v35y2001i2p165-180.html>.
- B. Gavish and E. Shlifer. An approach for solving a class of transportation scheduling problems. *European Journal of Operational Research*, 3(2):122–134, 1979. ISSN 0377-2217, doi [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(79\)90098-5](https://doi.org/10.1016/0377-2217(79)90098-5), URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377221779900985>.
- K. Gkiotsalitis, C. Iliopoulou, and K. Kepaptsoglou. An exact approach for the multi-depot electric bus scheduling problem with time windows. *European Journal of Operational Research*, 306(1):189–206, 2023. ISSN 0377-2217, doi <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2022.07.017>, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221722005707>.
- M. Gong, Y. Hu, Z. Chen, and X. Li. Transfer-based customized modular bus system design with passenger-route assignment optimization. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 153:102422, 2021. ISSN 1366-5545, doi <https://doi.org/10.1016/j.tre.2021.102422>, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1366554521001885>.
- R. Guo, W. Guan, M. Vallati, and W. Zhang. Modular autonomous electric vehicle scheduling for customized on-demand bus services. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 24(9):10055–10066, 2023, doi [10.1109/TITS.2023.3271690](https://doi.org/10.1109/TITS.2023.3271690), URL <https://ieeexplore.ieee.org/document/10122470>.

- A. Hadjar and F. Soumis. Dynamic window reduction for the multiple depot vehicle scheduling problem with time windows. *Computers OR*, 36:2160–2172, 07 2009, doi [10.1016/j.cor.2008.08.010](https://doi.org/10.1016/j.cor.2008.08.010).
- A. Hadjar, O. Marcotte, and F. Soumis. A branch-and-cut algorithm for the multiple depot vehicle scheduling problem. *Operations Research*, 54(1):130–149, 2006, doi [10.1287/opre.1050.0240](https://doi.org/10.1287/opre.1050.0240), URL <https://doi.org/10.1287/opre.1050.0240>.
- Y. Ji, B. Liu, Y. Shen, and Y. Du. Scheduling strategy for transit routes with modular autonomous vehicles. *International Journal of Transportation Science and Technology*, 10(2): 121–135, 2021. ISSN 2046-0430, doi <https://doi.org/10.1016/j.ijtst.2020.12.005>, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2046043020300824>.
- N. Kliewer, T. Mellouli, and L. Suhl. A new solution model for multi-depot multi-vehicle-type vehicle scheduling in (sub) urban public transport. In *Proceedings of the 13th Mini-EURO Conference*. Politechnic of Bari. Citeseer, 2002, URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:14155677>.
- N. Kliewer, T. Mellouli, and L. Suhl. A time–space network based exact optimization model for multi-depot bus scheduling. *European Journal of Operational Research*, 175(3):1616–1627, 2006. ISSN 0377-2217, doi <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.02.030>, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221705002274>.
- J.-Q. Li. Transit bus scheduling with limited energy. *Transportation Science*, 48(4):521–539, 2014, doi [10.1287/trsc.2013.0468](https://doi.org/10.1287/trsc.2013.0468), URL <https://doi.org/10.1287/trsc.2013.0468>.
- L. Li, H. K. Lo, and F. Xiao. Mixed bus fleet scheduling under range and refueling constraints. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 104:443–462, 2019. ISSN 0968-090X, doi <https://doi.org/10.1016/j.trc.2019.05.009>, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0968090X18303668>.
- T. Liu and A. (Avi) Ceder. Battery-electric transit vehicle scheduling with optimal number of stationary chargers. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 114:118–139, 2020. ISSN 0968-090X, doi <https://doi.org/10.1016/j.trc.2020.02.009>, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0968090X19304061>.
- T. Liu and A. A. Ceder. Analysis of a new public-transport-service concept: Customized bus in china. *Transport Policy*, 39:63–76, 2015. ISSN 0967-070X, doi <https://doi.org/10.1016/j.tranpol.2015.02.004>, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967070X15000256>.
- M. Mesquita and J. Paixão. Multiple depot vehicle scheduling problem: A new heuristic based on quasi-assignment algorithms. In M. Desrochers and J.-M. Rousseau, editors, *Computer-Aided Transit Scheduling*, pages 167–180, Berlin, Heidelberg, 1992. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-642-85968-7, URL [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-85968-7\\_12](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-85968-7_12).
- C. S. Orloff. Route constrained fleet scheduling. *Transportation Science*, 10(2):149–168, 1976. ISSN 00411655, 15265447, URL <http://www.jstor.org/stable/25767823>.

- U. Paris-Agreement. Paris agreement. Website, URL [https://treaties.un.org/pages/ViewDetails.aspx?src=TREATYmtdsg\\_n0\\_XXVII-7-dchapter=27clang\\_e\\_n](https://treaties.un.org/pages/ViewDetails.aspx?src=TREATYmtdsg_n0_XXVII-7-dchapter=27clang_e_n).
- J. Reuer, N. Kliwer, and L. Wolbeck. The electric vehicle scheduling problem: A study on time-space network based and heuristic solution. In *Proceedings of the Conference on Advanced Systems in Public Transport (CASPT)*, 2015, URL <http://www.rotterdam2015.caspt.org/proceedings/paper93.pdf>.
- C. C. Ribeiro and F. Soumis. A Column Generation Approach to the Multiple-Depot Vehicle Scheduling Problem. *Operations Research*, 42(1):41–52, February 1994, doi [10.1287/opre.42.1.41](https://doi.org/10.1287/opre.42.1.41), URL <https://ideas.repec.org/a/inm/oropre/v42y1994i1p41-52.html>.
- M. Rogge, E. van der Hurk, A. Larsen, and D. U. Sauer. Electric bus fleet size and mix problem with optimization of charging infrastructure. *Applied Energy*, 211:282–295, 2018. ISSN 0306-2619, doi <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2017.11.051>, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0306261917316355>.
- J. L. Saha. An algorithm for bus scheduling problems. *Journal of the Operational Research Society*, 21(4):463–474, 1970, doi [10.1057/jors.1970.95](https://doi.org/10.1057/jors.1970.95), URL <https://doi.org/10.1057/jors.1970.95>.
- J. Teng, T. Chen, and W. an. Integrated approach to vehicle scheduling and bus timetabling for an electric bus line. *Journal of Transportation Engineering, Part A: Systems*, 146(2):04019073, 2020, doi [10.1061/JTEPBS.0000306](https://doi.org/10.1061/JTEPBS.0000306), URL <https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/JTEPBS.0000306>.
- M. E. van Kooten Niekerk, J. M. van den Akker, and J. A. Hoogeveen. Scheduling electric vehicles. *Public Transport*, 9(1):155–176, Jul 2017. ISSN 1613-7159, doi [10.1007/s12469-017-0164-0](https://doi.org/10.1007/s12469-017-0164-0), URL <https://doi.org/10.1007/s12469-017-0164-0>.
- M. Wen, E. Linde, S. Ropke, P. Mirchandani, and A. Larsen. An adaptive large neighborhood search heuristic for the electric vehicle scheduling problem. *Computers Operations Research*, 76:73–83, 2016. ISSN 0305-0548, doi <https://doi.org/10.1016/j.cor.2016.06.013>, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054816301460>.

# Παράρτημα: Κώδικας Python

```
import gurobipy as gp #import gurobipy library in Python as gp
from gurobipy import GRB
import pandas as pd #import pandas library as pd. It offers data structures and operations
                        for manipulating numerical tables and time series
import numpy as np #import numpy library. It adds support for large, multi-dimensional
                        arrays and matrices
import os #provides functions for interacting with the operating system
import ast #library that processes trees of the Python abstract syntax grammar

print(gp.gurobi.version())

#Initialize the Gurobi model
model = gp.Model()

#####
# INPUT
#####

data_header_charg_event=np.loadtxt('Data/D2_S2_C10_charging_event_sequence.txt',max_rows=1,
                                dtype=int)
data_main_body_charg_event=np.loadtxt('Data/D2_S2_C10_charging_event_sequence.txt',skiprows=
                                1,dtype=int)
F_end = data_header_charg_event #last charging events at each charger
omega={}
for i in range(0,len(data_main_body_charg_event)):
    omega[data_main_body_charg_event[i,0]] = data_main_body_charg_event[i,1]

data_header=np.loadtxt('Data/D2_S2_C8_e_trips.txt',max_rows=1,dtype=int)
data_header_decimal=np.loadtxt('Data/D2_S2_C8_e_trips.txt',max_rows=1,dtype=float)
data_main_body=np.loadtxt('Data/D2_S2_C8_e_trips.txt',skiprows=1,dtype=int)
Vehicles=data_header[0]; Trips=data_header[1]; Charging_Events=data_header[2]; greek_l=
                data_header[3]; p_max=data_header[4]; p_min=data_header[5]; travel_cost=
                data_header[6]
r=data_header_decimal[7]; e_consumption = data_header_decimal[8] #kWh per km

r=float(r) #charging rate in kWh of energy per minute

inverse_r=float(1/r)
K=tuple(np.arange(1,Vehicles+1))
phi_max={k:p_max for k in K}# F max- kWh
phi_min={k:p_min for k in K}# F min-- kWh
O={};D={};l={};u={};O_N={};D_N={};N=[]
for k in K:
    j=k
    k=k-1
    O[j]=data_main_body[k,0]
    D[j]=data_main_body[k+Vehicles,0]
    l[O[j]]=data_main_body[k,5]; u[O[j]]=data_main_body[k,6]
    l[D[j]] = data_main_body[k+Vehicles,5]; u[D[j]] = data_main_body[k+Vehicles,6]
    O_N[O[j]]=[data_main_body[k,1],data_main_body[k,2]]
```

```

D_N[O[j]] = [data_main_body[k,3], data_main_body[k,4]]
O_N[D[j]]=[data_main_body[k+Vehicles,1],data_main_body[k+Vehicles,2]]
D_N[D[j]] = [data_main_body[k+Vehicles,3], data_main_body[k+Vehicles,4]]
N.append(O[j]);N.append(D[j])
V_dict={};V=[];j=0
for i in range(2*len(K),2*len(K)+Trips):
    j=j+1
    V_dict[j]=data_main_body[i,0]
    l[V_dict[j]]=data_main_body[i,5]; u[V_dict[j]]=data_main_body[i,6]
    O_N[V_dict[j]]=data_main_body[i,1], data_main_body[i,2]]
    D_N[V_dict[j]]=data_main_body[i,3], data_main_body[i,4]]
    l[V_dict[j]]=data_main_body[i,5]; u[V_dict[j]]=data_main_body[i,6]
    N.append(V_dict[j]); V.append(V_dict[j])
F_dict={};F=[];j=0
for i in range(2*len(K)+Trips,2*len(K)+Trips+Charging_Events):
    j=j+1
    F_dict[j]=data_main_body[i,0]
    l[F_dict[j]]=data_main_body[i,5]; u[F_dict[j]]=data_main_body[i,6]
    O_N[F_dict[j]]=data_main_body[i,1], data_main_body[i,2]]
    D_N[F_dict[j]]=data_main_body[i,3], data_main_body[i,4]]
    l[F_dict[j]]=data_main_body[i,5]; u[F_dict[j]]=data_main_body[i,6]
    N.append(F_dict[j]);F.append(F_dict[j])

##### kainourgia
#Set H
H=np.loadtxt('Data/D2_S2_C8_coupling_uncoupling_events.txt',max_rows=1,dtype=int).tolist()
coord=np.loadtxt('Data/D2_S2_C8_coupling_uncoupling_events.txt',skiprows=1,max_rows=1,dtype=
int).tolist()

N.extend(H)
for h in H:
    O_N[h]=coord
    D_N[h]=coord
    l[h]=0
    u[h]=6000
print('O_N,D_N', O_N, D_N)
#####

F_no_end = [] #charging events that are not the last ones in their charger
for i in F:
    if i not in F_end:
        F_no_end.append(i)

Nk={};Vk={}
for k in K:
    Nk[k]=V+H+F+[O[k],D[k]]
    Vk[k]=V

#####
t_tilde={} #travel time to complete trip i
eta={} #consumed energy when performing task i

from scipy.spatial import distance
for i in V:
    latitude_of_node_i_start=O_N[i][0]
    longitude_of_node_i_start=O_N[i][1]
    latitude_of_node_i_end=D_N[i][0]
    longitude_of_node_i_end=D_N[i][1]
    t_tilde[i] = distance.euclidean([latitude_of_node_i_start,longitude_of_node_i_start],[
latitude_of_node_i_end,longitude_of_node_i_end])
    eta[i] = e_consumption*distance.euclidean([latitude_of_node_i_start,
longitude_of_node_i_start],[latitude_of_node_i_end,
longitude_of_node_i_end])

```



```

t={} #travel time between the end location of task i and the start location of task j
bijk={} #travel cost from i to j
theta={} #consumed energy when deadheading from task i to task j

for i in N:
    for j in N:
        latitude_of_node_i_end=D_N[i][0]
        longitude_of_node_i_end=D_N[i][1]
        latitude_of_node_j_start=O_N[j][0]
        longitude_of_node_j_start = O_N[j][1]
        t[i,j]=distance.euclidean([latitude_of_node_i_end,longitude_of_node_i_end],[
            latitude_of_node_j_start,longitude_of_node_j_start])
        bijk[i,j]=travel_cost*t[i,j]
        theta[i,j] = e_consumption * distance.euclidean([latitude_of_node_i_end,
            longitude_of_node_i_end],[latitude_of_node_j_start,
            longitude_of_node_j_start])

        if i==j:
            t[i,j]=0; theta[i,j]=0

A={}
A_a={}; A_b={}; A_c={}; A_d={}; A_f={}; A_g={}; A_h={}; A_i={}; A_j={}
for k in K:
    A_a[k]=[(0[k],j) for j in Nk[k] if j!=0[k] if u[j]>=1[0[k]]+t[0[k],j]] #
        arcs_from_origin_depot
    A_b[k]=[(i,D[k]) for i in Nk[k] if i not in [0[k],D[k]]] #arcs_to_destination_depot
    A_c[k]=[(i,j) for i in Vk[k] for j in Vk[k] if i!=j if l[i]+t_tilde[i]+t[i,j]<=u[j]] #
        arcs_from_trip_to_trip
    A_d[k]=[(i,j) for i in Vk[k] for j in F if l[i]+t_tilde[i]+t[i,j]<=u[j]] #
        arcs_from_trip_to_charging_event
    A_f[k]=[(i,j) for i in F for j in Vk[k] if l[i]+t[i,j]<=u[j]] #
        arcs_from_chargingevent_to_trip
    A_g[k]=[(i,j) for i in Vk[k] for j in H]
    A_h[k]=[(i,j) for i in H for j in Vk[k]]
    A_i[k]=[(i,j) for i in F for j in H]
    A_j[k]=[(i,j) for i in H for j in F]
    A[k]=A_a[k]+A_b[k]+A_c[k]+A_d[k]+A_f[k]+A_g[k]+A_h[k]+A_i[k]+A_j[k]
    #A_a.clear();A_b.clear();A_c.clear();A_d.clear();A_f.clear();A_g.clear();A_h.clear();A_i
        .clear();A_j.clear() #to esvhsa kathws xreiazomai ta dictionaries

#A={1:A1_a+A1_b+A1_c+A1_d+A1_f,2:A2_a+A2_b+A2_c+A2_d+A2_f} #possible arcs per vehicle

q={i:0 for i in V} #closest charging node from the end of trip i
for i in V:
    distance=np.infty
    for j in F:
        if t[i,j]<=distance:
            distance=t[i,j]
            q[i]=j

##### kainourgia
#Parameters wj,m,rho
data_modular_units=np.loadtxt('Data\D2_S2_C8_coupling_uncoupling_events.txt',skiprows=2,
    max_rows=len(V),dtype=int)
w={i:j for i,j in data_modular_units[:]}
data_modular_units=np.loadtxt('Data\D2_S2_C8_coupling_uncoupling_events.txt',skiprows=2+len(
    V),dtype=int)
m=data_modular_units[0]; rho=data_modular_units[1]

#####

M=10000000 #very large positive number

x={}; sigma={}; sigma_tilde={}; z={}; test2={}

```

```

for k in K:
    for i,j in A[k]:
        x[i,j,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.BINARY, name='x%s' % str([i,j,k])) #binary flow
            variable where xijk=1 if vehicle k uses arc ij
        sigma[i,j,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-2 * M, ub=+2 * M,
            name='sigma%s' % str([i,j,k])) # binary flow variable where
            xijk=1 if vehicle k uses arc ij
        sigma_tilde[i,j,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-2 * M, ub=+2 * M,
            name='sigma_tilde%s' % str([i,j,k])) # binary flow
            variable where xijk=1 if vehicle k
            uses arc ij

        if i in Vk[k]+F+H+[O[k]]:
            z[i,j,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-1000000000, name='z%s' %
                str([i,j,k])) # objective function
            test2[i,j,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.INTEGER, lb=-1000000000, name='test2%s'
                % str([i,j,k]))

T={}; e={}; e_bar={}; g={}
for k in K:
    for i in Nk[k]:
        T[i,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, name='T%s' % str([i,k]))
    for i in Vk[k]+F+H+[D[k]]:
        e[i,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-1000000000, name='e%s' % str([i,
            k])) #SOC of vehicle k when it arrives at node task i
    for i in Vk[k]+F+H+[O[k]]:
        e_bar[i,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-1000000000, name='e_bar%s' %
            str([i,k])) #SOC of vehicle k when it completes task i
    for i in Vk[k]+F:
        g[i,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-1000000000, name='g%s' % str([i,
            k])) # SOC change of vehicle k when performing node task i

tau = model.addVars(F,K,vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-1000000000, name='tau') #required time
    period to recharge vehicle k at charging event i
s_tilde = model.addVars(F,K,vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-1000000000, name='s_tilde')
y = model.addVars(F,K,vtype=gp.GRB.BINARY, name='y')

##### kainourgia
sigma_bar={}; delta_bar={}
for k in K:
    for i,j in A[k]:
        sigma_bar[i,j,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-2 * M, ub=+2 * M, name=
            'sigma_bar%s' % str([i,j,k]))

k_bar = model.addVars(N,K,vtype=gp.GRB.INTEGER, lb=0, ub=2, name='k_bar')
q_bar = model.addVars(H,K,vtype=gp.GRB.BINARY, name='q_bar') #binary indicator for coupling
    event i
t_bar= model.addVars(H,K,vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=0, name='t_bar') #time in which a
    coupling event i is completed
r_bar= model.addVars(H,K,vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-2 * M, ub=+2 * M, name='r_bar')
delta= model.addVars(H,K,vtype=gp.GRB.BINARY, name='delta')
test= model.addVars(H,K,vtype=gp.GRB.INTEGER, lb=-2, ub=2, name='test')
#####

#CONSTRAINTS

model.addConstrs( sum ( q_bar[i,k] for i in H) <= 3 for k in K)
model.addConstrs( sum( sum ( x[i,j,k] for i,j in A[k] if j==jj) for k in K ) == 1 for jj in
    V) # eq.(2)
model.addConstrs( sum( sum ( x[i,j,k] for i,j in A[k] if j==jj) for k in K ) <= 1 for jj in
    F+H) # eq.(3)

model.addConstrs(sum(x[i, j, k] for i, j in A[k] if i == O[k]) == 1 for k in K) # eq.(4)
model.addConstrs(sum(x[i, j, k] for i, j in A[k] if j == D[k]) == 1 for k in K) # eq.(4)

```

```

model.addConstrs(sum(x[i,j,k] for i,j in A[k] if j==jj) == sum(x[j,i,k] for j,i in A[k] if j
==jj) for k in K for jj in Vk[k]+F+H) #eq.(5) # +H kainourgio

model.addConstrs(tau[i,k]==(phi_max[k] - e[i,k])*inverse_r for i in F for k in K) #eq.(10)
model.addConstrs(T[i,k]>=1[i] for k in K for i in Nk[k]) #eq.(11)
model.addConstrs(T[i,k]<=u[i] for k in K for i in Nk[k]) #eq.(11)

model.addConstrs(e_bar[0[k],k]==phi_max[k] for k in K) #eq.(13)
model.addConstrs(e_bar[j,k]==e[j,k]-g[j,k] for k in K for j in Vk[k]+F) #eq.(14)

model.addConstrs(e[j,k]<=(e_bar[i,k]-theta[i,j]*(1+test2[i,j,k]))+(1-x[i,j,k])*M for k in K
for i,j in A[k]) #eq.(16)
model.addConstrs(g[i,k]==eta[i]*(k_bar[i,k]+1) for k in K for i in Vk[k]) #eq.(17)
model.addConstrs(g[i,k]==e[i,k]-phi_max[k] for i in F for k in K) #eq.(18)
model.addConstrs(e[i,k]>=phi_min[k] for k in K for i in Vk[k]+F+[D[k]]+H) #eq.(19)
model.addConstrs(e_bar[i,k]>=phi_min[k] + float(theta[i,q[i]])*(k_bar[i,k]+1) for k in K for
i in Vk[k]) #eq.(?)
model.addConstrs(y[ii,k] == sum(x[i,j,k] for i,j in A[k] if i==ii) for ii in F for k in K)
#eq.(20)

#####
model.addConstrs(e_bar[j,k]==e[j,k] for k in K for j in H)
model.addConstrs(k_bar[0[k],k]==0 for k in K) #eq (22)
model.addConstrs(q_bar[ii,k]==sum(x[i,j,k] for i,j in A[k] if i==ii) for ii in H for k in K)
#eq (22)
#####

model.addConstrs(T[i,k]+t_tilde[i]+t[i,j]-T[j,k]+sigma[i,j,k]<=0 for k in K for i,j in A[k]
if i in Vk[k]) #eq (28)
model.addConstrs(T[i,k]+t[i,j]-T[j,k]+sigma[i,j,k]<=0 for k in K for i,j in A[k] if i==0[k])
#eq (29)
model.addConstrs(T[i,k]+tau[i,k]+t[i,j]-T[j,k]+sigma[i,j,k]<=0 for k in K for i,j in A[k] if
i in F) #eq.(30)

#####
model.addConstrs(T[i,k]+t_bar[i,k]+t[i,j]-T[j,k]+sigma_bar[i,j,k]<=0 for k in K for i,j in A
[k] if i in H) #eq.(31)
#####

model.addConstrs(sigma[i,j,k]<=M*(1-x[i,j,k]) for k in K for i,j in A[k] if i in Vk[k]+F+[0[
k]]) #eq.(32)
model.addConstrs(sigma[i,j,k]>=-M*(1-x[i,j,k]) for k in K for i,j in A[k] if i in Vk[k]+F+[0
[k]]) #eq.(33)

#####
model.addConstrs(sigma_bar[i,j,k]<=M*(1-x[i,j,k]) for k in K for i,j in A[k] if i in H) #eq
.(32)
model.addConstrs(sigma_bar[i,j,k]>=-M*(1-x[i,j,k]) for k in K for i,j in A[k] if i in H) #eq
.(33)
#####

model.addConstrs(e[j,k]>=e_bar[i,k]-(1+test2[i,j,k])*theta[i,j]+sigma_tilde[i,j,k] for k in
K for i,j in A[k]) #eq.(34)
model.addConstrs(sigma_tilde[i,j,k]<=M*(1-x[i,j,k]) for k in K for i,j in A[k]) #eq.(35)
model.addConstrs(sigma_tilde[i,j,k]>=-M*(1-x[i,j,k]) for k in K for i,j in A[k]) #eq.(36)
model.addConstrs(T[i,k0] + tau[i,k0] + s_tilde[i,k0] <= T[omega[i],k] + M*(1- sum(x[l,r,k]
for l,r in A[k] if l==omega[i])) for i in F_no_end for k in K for k0 in
K) #eq.(37)
model.addConstrs(s_tilde[i,k0]<=M*(1-y[i,k0]) for i in F for k0 in K) #eq.(38)
model.addConstrs(s_tilde[i,k0]>=-M*(1-y[i,k0]) for i in F for k0 in K) #eq.(39)

#####

```

```

model.addConstrs(k_bar[i,k]>=x[i,j,k]*w[j] for k in K for i,j in A[k] if i in Vk[k]+F+[0[k]]
                and j in Vk[k])
model.addConstrs(k_bar[i,k]+ test[i,k] >=x[i,j,k]*w[j] for k in K for i,j in A[k] if i in H
                and j in Vk[k])
model.addConstrs(k_bar[j, k] - k_bar[i, k] - test[i, k] <= (1 - x[i,j,k]) * M for k in K for
                i,j in A[k] if i in H)
model.addConstrs(k_bar[j, k] - k_bar[i, k] - test[i, k] >= (x[i,j,k] - 1) * M for k in K for
                i,j in A[k] if i in H)
model.addConstrs(k_bar[j, k] - k_bar[i, k] <= (1 - x[i,j,k]) * M for k in K for i,j in A[k]
                if i not in H)
model.addConstrs(k_bar[j, k] - k_bar[i, k] >= (x[i,j,k] - 1) * M for k in K for i,j in A[k]
                if i not in H)
model.addConstrs(t_bar[i,k]==rho*(r_bar[i,k]) for k in K for i in H ) #eq (26)

model.addConstrs(r_bar[i,k]>= test[i,k] for k in K for i in H ) #eq (40)
model.addConstrs(r_bar[i,k]>= - test[i,k] for k in K for i in H) #eq (41)
model.addConstrs(r_bar[i,k]<= test[i,k] + delta[i,k]*M for k in K for i in H) #eq (42)
model.addConstrs(r_bar[i,k]<= - test[i,k] + (1-delta[i,k])*M for k in K for i in H) #eq (43)
)

model.addConstrs(test2[i,j,k] <= M * x[i,j,k] for k in K for i,j in A[k] if i in Vk[k]+F+[0[
k]]+H) #eq.(44)
model.addConstrs(test2[i,j,k] >= -M * x[i,j,k] for k in K for i,j in A[k] if i in Vk[k]+F+[0
[k]]+H) #eq.(45)
model.addConstrs(test2[i,j,k] <= k_bar[j,k] + M * (1-x[i,j,k]) for k in K for i,j in A[k] if
i in Vk[k]+F+[0[k]]+H) #eq.(44)
model.addConstrs(test2[i,j,k] >= k_bar[j,k] - (1-x[i,j,k]) * M for k in K for i,j in A[k] if
i in Vk[k]+F+[0[k]]+H) #eq.(45)

#####

model.addConstrs(z[i,j,k]<=M*x[i,j,k] for k in K for i,j in A[k] if i in Vk[k]+F+[0[k]]+H) #
eq.(44)
model.addConstrs(z[i,j,k]>=-M*x[i,j,k] for k in K for i,j in A[k] if i in Vk[k]+F+[0[k]]+H)
#eq.(45)
model.addConstrs(z[i,j,k]<=(1+test2[i,j,k])*bijk[i,j]+greek_l*(T[j,k]-(T[i,k]+t_tilde[i]+t[i
,j]))+M*(1-x[i,j,k]) for k in K for i,j in A[k] if i in Vk[k]) #eq.(46)
model.addConstrs(z[i,j,k]<=(1+test2[i,j,k])*bijk[i,j]+greek_l*(T[j,k]-(T[i,k]+t[i,j]))+M*(1-
x[i,j,k]) for k in K for i,j in A[k] if i==0[k]) #eq.(46a)
model.addConstrs(z[i,j,k]<=(1+test2[i,j,k])*bijk[i,j]+greek_l*(T[j,k]-(T[i,k]+tau[i,k]+t[i,j
]))+M*(1-x[i,j,k]) for k in K for i,j in A[k] if i in F) #eq.(47)

#####my constraints
model.addConstrs(z[i,j,k]<=(1+test2[i,j,k])*bijk[i,j]+greek_l*(T[j,k]-(T[i,k]+t_bar[i,k]+t[i
,j]))+M*(1-x[i,j,k]) for k in K for i,j in A[k] if i in H) #eq.(48)

#####

model.addConstrs(z[i,j,k]>=(1+test2[i,j,k])*bijk[i,j]+greek_l*(T[j,k]-(T[i,k]+t_tilde[i]+t[i
,j]))-(1-x[i,j,k])*M for k in K for i,j in A[k] if i in Vk[k]) #eq.(49)
model.addConstrs(z[i,j,k]>=(1+test2[i,j,k])*bijk[i,j]+greek_l*(T[j,k]-(T[i,k]+t[i,j]))-(1-x[
i,j,k])*M for k in K for i,j in A[k] if i==0[k]) #eq.(49a)
model.addConstrs(z[i,j,k]>=(1+test2[i,j,k])*bijk[i,j]+greek_l*(T[j,k]-(T[i,k]+tau[i,k]+t[i,j
]))-(1-x[i,j,k])*M for k in K for i,j in A[k] if i in F) #eq.(50)

#####my constraints
model.addConstrs(z[i,j,k]>=(1+test2[i,j,k])*bijk[i,j]+greek_l*(T[j,k]-(T[i,k]+t_bar[i,k]+t[i
,j]))-(1-x[i,j,k])*M for k in K for i,j in A[k] if i in H) #eq.(51)

#####

#VALID INEQUALITIES
model.addConstrs(e[j,k]<=phi_max[k] for k in K for j in Vk[k]+F+[D[k]]+H) #eq.(51)

```

```

model.addConstrs(e_bar[i,k]>=phi_min[k] + float(theta[i,q[i]])*(k_bar[i,k]+1) for k in K for
i in Vk[k]) #eq.(52)
model.addConstrs(sum(y[i,k]*l[i] for k in K) <= T[omega[i],k] + M*(1- sum( x[l,r,k] for l,r
in A[k] if l==omega[i] ) ) for i in F_no_end for k in K) #eq.(53)
model.addConstrs(T[i,k]+t_tilde[i]+t[i,j]+sigma[i,j,k]<=u[j] for k in K for i,j in A[k] if i
in Vk[k]) #eq.(54)
model.addConstrs(T[i,k]+tau[i,k]+t[i,j]+sigma[i,j,k]<=u[j] for k in K for i,j in A[k] if i
in F) #eq.(55)
model.addConstrs(T[i,k]+t_bar[i,k]+t[i,j]+sigma_bar[i,j,k]<=u[j] for k in K for i,j in A[k]
if i in H) #eq.(31)

for k in K:
    for k2 in K:
        if k2!=k:
            for i,j in A[k]:
                for i2,j2 in A[k2]:
                    if i==i2 and j==j2:
                        model.addConstr(x[i,j,k]+x[i2,j2,k2]<=1) #eq.(56)

for k in K:
    for i,j in A[k]:
        for i2,j2 in A[k]:
            if i==i2 and j!=j2:
                model.addConstr(x[i, j, k] + x[i2, j2, k] <= 1) #eq.(57)
            if j==j2 and i!=i2:
                model.addConstr(x[i, j, k] + x[i2, j2, k] <= 1) #eq.(58)

#OBJECTIVE FUNCTION
obj = sum( sum(z[i,j,k] for i,j in A[k] if i in Vk[k]+F+H+[O[k]]) for k in K) + m*sum( sum(
test2[i,j,k] for i,j in A[k] if i in Vk[k]+F+H+[O[k]]) for k in K)

model.update()
#Add objective function to model and declare that we solve a minimization problem
model.setObjective(obj,GRB.MINIMIZE)
print('variables',model.numVars)
print('constraints',model.NumConstrs)
#model.NumConstrs()
# Solve the model and return results.
#model.params.NonConvex = 2 # allow to handle quadratic equality constraints - which are
always non-convex

model.optimize()
#model.computeIIS()
#model.write("model.mps")
if model.status == GRB.OPTIMAL: # check if the solver is capable of finding an optimal
solution
    #model.printAttr('X')
    print(model.status, 'optimal')
    print('Obj: %g' % model.objVal)
else:
    print(model.status, 'not optimal')

#print results
for v in model.getVars():
    if v.x > 0:
        print('%s %g' % (v.varName, v.x))

#####
with open('outputOriginal.txt','w') as f_out:
    # print results
    for v in model.getVars():
        if v.x > 0 or v.varName=='test':
            f_out.write('%s %g\n' % (v.varName, v.x))

```

```
#####  
print('SYNOLO',sum( sum(z[i,j,k].x for i,j in A[k] if i in Vk[k]+F+H+[O[k]]) for k in K))
```