



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ ΚΑΙ ΣΥΓΚΟΙΝΩΝΙΑΚΗΣ ΥΠΟΔΟΜΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΙΔΗΡΟΔΡΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΡΟΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΛΕΩΦΟΡΕΙΩΝ ΜΕ ΧΡΟΝΙΚΑ ΠΑΡΑΘΥΡΑ ΚΑΙ
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥΣ ΔΙΑΔΡΟΜΩΝ



ΒΛΑΔΙΣΛΑΒ ΚΟΣΤ

CV19002

Επιβλέπων:

Κωνσταντίνος Γκιτσιάλιτης / Επίκουρος Καθηγητής

Τομέας Μεταφορών και Συγκοινωνιακής Υποδομής, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2024

DIPLOMA THESIS

ELECTRIC BUS SCHEDULING PROBLEM WITH TIME WINDOWS, CONSIDERING STOCHASTIC TRAVEL TIMES



VLADYSLAV KOST

CV19002

Supervisor:

Konstantinos Gkiotsalitis / Assistant Professor

Dept. of Transportation Planning and Engineering, School of Civil Engineering, NTUA

Athens, October 2024

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα πρωτίστως να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή Κωνσταντίνο Γκιτσισαλίτη και την Μαριλένα Μεράκου για την άριστη συνεργασία μας και την καθοδήγησή τους, κατά την εκπόνηση αυτής της εργασίας. Ύστερα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, την Οξάνα και τον Τόλικ, για την αγάπη και την υποστήριξη που μου παρείχαν, καθώς και για τις θυσίες που πραγματοποίησαν καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου (και όχι μόνο).

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την Ευαγγελία, τον Πάρι και τον Στέλιο για την συντροφικότητά τους στο ταξίδι των σπουδών μας.



Πίπη και Αιμιλία, Zatopek, 2024

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η αντιμετώπιση της κλιματικής κρίσης επιτάσσει την μείωση των εκπομπών αερίων θερμοκηπίου, με τον τομέα των μεταφορών να καταλαμβάνει σημαντικό ποσοστό των εκπομπών. Συνεπώς, συντελείται μια προσπάθεια μείωσης των εκπομπών του τομέα, με ένα από τα δημοφιλέστερα εργαλεία να είναι ο εξηλεκτρισμός του στόλου οχημάτων, με την μετάβαση των στόλων λεωφορείων σε ηλεκτρικά με συσσωρευτές. Όμως, η περιορισμένη χωρητικότητα και η σχετικά αργή ταχύτητα φόρτισης των διαθέσιμων συσσωρευτών δημιουργούν καινούριες προκλήσεις στον προγραμματισμό δρομολόγησης, σε σχέση με τα συμβατικά λεωφορεία κινητήρων εσωτερικής καύσης. Η παρούσα διπλωματική εργασία αποσκοπεί στην συμπερίληψη των απαιτήσεων της **φόρτισης**, καθώς και της **τυχαιότητας των χρόνων δρομολογίων**, κατά την ανάπτυξη ενός μοντέλου **βελτιστοποίησης προγραμματισμού δρομολόγησης**.

Στην βιβλιογραφική ανασκόπηση αναφέρονται τα προϋπάρχοντα μοντέλα με τα οποία επιλύεται το πρόβλημα δρομολόγησης ηλεκτρικών λεωφορείων. Αναλύονται οι παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν τον προγραμματισμό δρομολόγησης όπως: το ενεργειακό κόστος, η τοποθεσία των σταθμών φόρτισης, ο τύπος των φορτιστών (αργός ή γρήγορος), η αναλογία των τύπων οχημάτων και ο αριθμός των οχημάτων. Προτείνεται μια ποικιλία μεθόδων επίλυσης, από εμπορικά λογισμικά επίλυσης που προσφέρονται για επίλυση γραμμικών μοντέλων, μέχρι ευρετικές μεθόδους όπως η Variable Neighborhood Search Branching και η Adaptive Genetic Algorithm. Στις περισσότερες μελέτες αναπτύσσεται ένα γραμμικό μοντέλο προγραμματισμού, ενώ στην παρούσα εργασία ενσωματώνονται **πολλαπλά ενδεχόμενα χρόνων διαδρομών**, και αναπτύσσεται μια εναλλακτική εκδοχή του μοντέλου με περιορισμό πιθανότητας. Ως εργασία αναφοράς επιλέγεται η Gkiotsalitis et al. (2023). Επίσης, κατά τη βιβλιογραφική ανασκόπηση, διαπιστώνεται πως οι χρόνοι διαδρομής λεωφορείων τείνουν να ακολουθούν την **λογαριθμο-κανονική κατανομή**.

Στην ενότητα της μεθοδολογίας περιγράφεται η μορφή του μοντέλου της εργασίας αναφοράς. Συγκεκριμένα, αναλύεται η μορφή του μοντελοποιημένου δικτύου, με την περιγραφή των κόμβων και των συνδέσμων του. Περιγράφεται η κίνηση των οχημάτων μέσα σε αυτό το δίκτυο και επεξηγούνται οι **μεταβλητές απόφασης**. Έπειτα, γίνεται αναφορά στη συνεισφορά αυτής της εργασίας στο μοντέλο, συγκεκριμένα στην εισαγωγή της τυχαιότητας στους χρόνους διαδρομής υπηρεσίας. Παρουσιάζεται η **αντικειμενική συνάρτηση** και γίνεται επεξήγηση των **περιορισμών** του μοντέλου. Τέλος, παρουσιάζεται ο **περιορισμός πιθανότητας** καθώς και η διατύπωσή του, η οποία είναι συμβατή με επιλυτή του εμπορίου.

Στην ενότητα της συλλογής και επεξεργασίας δεδομένων, αναγνωρίζεται η ανάγκη συλλογής δεδομένων για πραγματικούς χρόνους διαδρομής. Πηγή των δεδομένων αποτελεί ο φορέας λειτουργίας συγκοινωνιών της Κρακοβίας (ZTP) και η διαμόρφωση των δεδομένων είναι η GTFS-Realtime & η GTFS-Static. Περιγράφεται η μεθοδολογία συλλογής και επεξεργασίας των δεδομένων, με στόχο την παραγωγή αρχείων παραμέτρων, τα οποία στη συνέχεια χρησιμοποιούνται σε **αριθμητικά παραδείγματα**.

Για το αριθμητικό παράδειγμα επίλυσης των 2 εκδοχών του μοντέλου, χρησιμοποιούνται **4 σενάρια δρομολόγησης**. Οι παράμετροι αυτών των 4 σεναρίων παρουσιάζονται λεπτομερώς. Κάθε σενάριο δρομολόγησης επιλύεται με **3 διαφορετικές μεθόδους**: με το μοντέλο της εργασίας αναφοράς, με το μοντέλο στοχαστικών χρόνων διαδρομών υπηρεσίας χωρίς περιορισμούς πιθανότητας και με την εκδοχή του

μοντέλου με περιορισμούς πιθανότητας. Τέλος, πραγματοποιείται **ανάλυση ευαισθησίας** του μοντέλου στην **μεταβολή της τυπικής απόκλισης** των χρόνων διαδρομών υπηρεσίας.

Σε ότι αφορά τα **συμπεράσματα**, παρατηρείται πως ο προγραμματισμός δρομολόγησης, λαμβάνοντας υπόψιν **στοχαστικούς χρόνους δρομολογίων** επιφέρει σημαντική αύξηση του επιχειρησιακού κόστους, σε σχέση με την εργασία αναφοράς, όμως αποδίδει καλύτερα σε **μεταβολές της τυπικής απόκλισης** των χρόνων διαδρομών. Επιπλέον, η εισαγωγή περιορισμών πιθανότητας κατά την επίλυση του προβλήματος, μετριάζει σε σημαντικό βαθμό την αύξηση του επιχειρησιακού κόστους. Ενώ τα προγράμματα δρομολόγησης που δημιουργούνται με **περιορισμούς πιθανότητας** αποδίδουν σε παρόμοιο βαθμό, σε **μεταβολές της τυπικής απόκλισης** των χρόνων δρομολογίων, με τα προγράμματα δρομολόγησης που δημιουργήθηκαν χωρίς περιορισμούς πιθανότητας. Όμως, το **υπολογιστικό κόστος** και των 2 εκδοχών του μοντέλου της εργασίας είναι πολύ ψηλότερο με αυτό της εργασίας αναφοράς.

Τέλος, πεδία περαιτέρω έρευνας αποτελούν η επίλυση του προβλήματος με γρηγορότερους **(μετα)ευρετικούς αλγορίθμους**, σε μεγαλύτερα δίκτυα, με περισσότερες τιμές περιορισμού πιθανότητας, καθώς και η επίδραση του **κόστους ενέργειας και της επιβατικής ζήτησης** στα χρονικά παράθυρα δρομολόγησης. Επίσης, ενδιαφέρον προκαλεί τυχόν διατύπωση της αντικειμενικής συνάρτησης με τη μέθοδο του **αναμενόμενου ελλείματος** (expected shortfall).

SUMMARY

Addressing the climate crisis necessitates a reduction in greenhouse gas emissions, with the transportation sector accounting for a significant share of these emissions. Consequently, efforts are being made to reduce emissions in this sector, with one of the most popular tools being the electrification of vehicle fleets, particularly the transition of bus fleets to battery-electric vehicles. However, the limited capacity and relatively slow charging speed of available batteries introduce new challenges to scheduling compared to conventional internal combustion engine buses. This thesis aims to incorporate the requirements of **charging**, as well as the **uncertainty in trip durations**, into the development of a **bus scheduling optimization model**.

The literature review presents existing models used to solve the electric bus scheduling problem. It analyzes factors affecting bus scheduling, such as energy costs, the location of charging stations, the type of chargers (slow or fast), the ratio of different vehicle types, and the number of vehicles. A variety of solution methods are proposed, ranging from commercial solvers for linear models to heuristic methods such as Variable Neighborhood Search Branching and the Adaptive Genetic Algorithm. Most studies develop a linear programming model, whereas this thesis incorporates **multiple scenarios of travel times** and develops an alternative version of the model with a probability constraint. The reference study chosen is Gkiotsalitis et al. (2023). Additionally, the literature review identifies that bus travel times tend to follow a **log-normal distribution**.

The methodology section describes the structure of the reference model. Specifically, it analyzes the form of the modeled network, detailing its nodes and links. The movement of vehicles within this network is described, and the **decision variables** are explained. The contribution of this thesis to the model is then outlined, particularly the introduction of randomness in service trip times. The **objective function** is presented, along with an explanation of the model's **constraints**. Finally, the **probability constraint** is introduced, and its formulation is made compatible with commercial solvers.

In the data collection and processing section, the need for real-world trip time data collection is recognized. The source of the data is the public transport operator of Kraków (ZTP), and the data formats used are GTFS-Realtime and GTFS-Static. The methodology for collecting and processing the data is described, with the aim of producing parameter files, which are then used in **numerical examples**.

For the numerical example solving the two versions of the model, **four scheduling scenarios** are used. The parameters for these four scenarios are presented in detail. Each scheduling scenario is solved using **three different methods**: the reference model, the model with stochastic service travel times without probability constraints, and the model version with probability constraints. Lastly, a **sensitivity analysis** is conducted to examine the impact of **changes in the standard deviation** of service trip times on the model.

Regarding the **conclusions**, it is observed that incorporating **stochastic trip times** into bus scheduling significantly increases operational costs compared to the reference model but performs better when the standard deviation of trip times varies. Furthermore, the introduction of probability constraints when solving

the problem substantially mitigates the increase in operational costs. The scheduling programs developed with **probability constraints** perform similarly in response to changes in the **standard deviation of trip times** as those developed without probability constraints. However, the **computational cost** of both versions of the model in this thesis is much higher than that of the reference model.

Finally, potential areas for further research include solving the problem using faster **(meta-)heuristic** algorithms in larger networks, with more probability constraint values, as well as studying the impact of **energy costs and passenger demand** on scheduling time windows. Additionally, another potential research area of great interest includes the optimization of operational cost using the method of the **expected shortfall**.

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή.....	8
2. Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	11
2.1 Βελτιστοποίηση προγραμματισμού δρομολόγησης ηλεκτρικών λεωφορείων.....	11
2.2 Βελτιστοποίηση προγραμματισμού φόρτισης ηλεκτρικών λεωφορείων, με βάση τον χρόνο εκτός υπηρεσίας	13
2.3 Κατανομές διακύμανσης χρόνου διαδρομής λεωφορείων	15
3. Μεθοδολογία.....	17
3.1.1 Το πρόβλημα δρομολόγησης ηλεκτρικών λεωφορείων, πολλαπλών αμαξοστασίων, με χρονικά παράθυρα.....	17
3.1.2 Το πρόβλημα δρομολόγησης ηλεκτρικών λεωφορείων, πολλαπλών αμαξοστασίων, με χρονικά παράθυρα, θεωρώντας στοχαστικά δεδομένα χρόνων δρομολογίων.....	22
3.2 Συμβολισμοί μοντέλου.....	23
3.3 Μαθηματικό Μοντέλο	26
3.4 Μαθηματικό μοντέλο, με περιορισμούς πιθανότητας	31
4. Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων χρόνων διαδρομής	33
4.1 Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων trip update.....	34
4.2 Στατιστική επεξεργασία δεδομένων χρόνων διαδρομής	35
4.3 Επεξεργασία αρχείων παραμέτρων	36
5. Εφαρμογή και Αποτελέσματα.....	37
5.1 Ορισμός αριθμητικού παραδείγματος	37
5.2 Αποτελέσματα αριθμητικού παραδείγματος.....	47
5.3 Ανάλυση Ευαισθησίας με βάση την τυπική απόκλιση των χρόνων διαδρομής υπηρεσίας	48
6. Συμπεράσματα	55
Βιβλιογραφικές Αναφορές	57
Παράρτημα	

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΡΟΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΛΕΩΦΟΡΕΙΩΝ ΜΕ ΧΡΟΝΙΚΑ ΠΑΡΑΘΥΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥΣ ΔΙΑΔΡΟΜΩΝ

Βλαδισλάβ Κοστ^{a,*}

^a Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Τομέας Μεταφορών και Συγκοινωνιακής Υποδομής, Εργαστήριο Σιδηροδρομικής και Μεταφορών, Ηρώων Πολυτεχνείου 5, 15773 Αθήνα, Ελλάδα

Σύνοψη

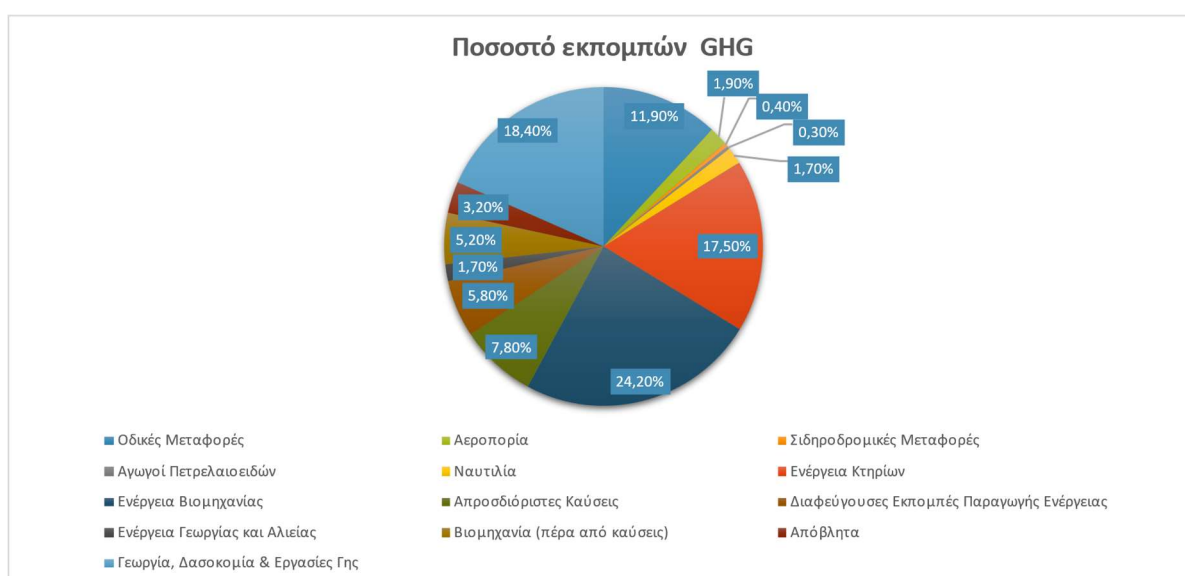
Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται το πρόβλημα βελτιστοποίησης της δρομολόγησης ηλεκτρικών λεωφορείων, πολλαπλών αμαξοστασίων, με χρονικά παράθυρα και στοχαστικούς χρόνους δρομολογίων με την διατύπωση ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού μεικτών-ακεραίων (**MILP**). Η εργασία αποσκοπεί να αναπτύξει ένα εργαλείο προγραμματισμού δρομολόγησης ηλεκτρικών λεωφορείων το οποίο να λαμβάνει υπόψιν ακραίες συνθήκες δρομολόγησης, διατηρώντας όμως το **επιχειρησιακό κόστος** σε ανεκτά επίπεδα. Για την περίπτωση που υπάρχει η επιθυμία να ληφθούν υπόψιν ακραίες συνθήκες, αλλά σε μικρότερο βαθμό, εισάγεται ένας **περιορισμός πιθανότητας**. Κατασκευάζεται μοντέλο βελτιστοποίησης με κύριες μεταβλητές απόφασης: την επιλογή συνδέσμου δρομολόγησης οχήματος, την επιλογή γεγονότος φόρτισης και την χρονική στιγμή εκκίνησης εργασίας σε έναν κόμβο. Για το ορισμό των παραμέτρων των χρόνων διαδρομών υπηρεσίας, συλλέγονται και επεξεργάζονται πραγματικά δεδομένα GTFS-Realtime και GTFS-Static. Για 4 συνθετικά σενάρια δρομολόγησης των **10 δρομολογίων**, επιλύεται ένα μοντέλο αναφοράς χωρίς στοχαστικούς χρόνους δρομολογίων, η εκδοχή του μοντέλου χωρίς και η εκδοχή του μοντέλου με περιορισμό πιθανότητας. Η επίλυση πραγματοποιείται με εμπορικό λογισμικό επίλυσης. Το επιχειρησιακό κόστος των προγραμμάτων δρομολόγησης υπολογισμένων με το μοντέλο χωρίς περιορισμό πιθανότητας είναι 49% με 75% υψηλότερο από το μοντέλο αναφοράς. Ενώ για τα προγράμματα δρομολόγησης υπολογισμένων με περιορισμό πιθανότητας και τιμή πιθανότητας $\alpha=80\%$, το επιχειρησιακό κόστος είναι 20% με 33% υψηλότερο από τα αποτελέσματα του μοντέλου αναφοράς. Πραγματοποιείται **ανάλυση ευαισθησίας** για την μεταβολή της τυπικής απόκλισης των χρόνων διαδρομής, όπου προκύπτει πως και οι 2 εκδοχές του μοντέλου επιδεικνύουν ευαισθησία. Η σημαντικότερη προσφορά της παρούσας εργασίας είναι η παροχή ενός πλαισίου, μέσα στο οποίο μπορεί λυθεί το πρόβλημα δρομολόγησης ηλεκτρικών λεωφορείων, λαμβάνοντας υπόψη αρκετούς παράγοντες όπως πολλαπλά αμαξοστάσια, πολλαπλούς σταθμούς φόρτισης και στοχαστικούς χρόνους δρομολογίων και το οποίο μπορεί να επεκταθεί περαιτέρω, παρέχοντας προγράμματα δρομολόγησης ανθεκτικά σε ακραίες συνθήκες και σε λελογισμένο επιχειρησιακό κόστος.

Λέξεις Κλειδιά: Ηλεκτρικό Λεωφορείο; MILP; Δρομολόγηση; Στοχαστικότητα; Περιορισμός Πιθανότητας

* E-mail: cv19002@mail.ntua.gr

1. Εισαγωγή

Διανύοντας τον 21^ο αιώνα, η παγκόσμια κοινότητα καλείται να αντιμετωπίσει το ζήτημα της κλιματικής αλλαγής και κατά συνέπεια το ζήτημα της μείωσης των εκπομπών αερίων θερμοκηπίου, GHG εφεξής (Greenhouse Gases – GHG). Ήδη, οι εκπομπές του διοξειδίου του άνθρακα βρίσκονται σε υψηλότερο επίπεδο από τον στόχο που έχει τεθεί από την συμφωνία του Παρισιού (ITF, Transport Outlook, 2023). Οι μεταφορές αποτελούν μια από τις κύριες συνιστώσες των ανθρωπογενών εκπομπών σε ποσοστό 16,2%. Συγκεκριμένα οι οδικές μεταφορές συνεισφέρουν στις εκπομπές ρυπογόνων αερίων κατά 11,9% (Ritchie et al, 2020). Τα φορτηγά οχήματα, τα αστικά και τα υπεραστικά λεωφορεία προκαλούν πάνω από το 6% των εκπομπών GHG της Ευρωπαϊκής Ένωσης και πάνω από το 25% των εκπομπών GHG των οδικών μεταφορών. Με βάση αυτό, στο πλαίσιο της Ευρωπαϊκής Πράσινης Συμφωνίας, η Ευρωπαϊκή Επιτροπή έχει προτείνει την απαγόρευση ταξινόμησης νέων λεωφορείων, τα οποία δεν είναι μηδενικών εκπομπών GHG, από το 2030 και έπειτα (Ευρωπαϊκή Επιτροπή, 2023).



Διάγραμμα 1: Ποσοστό εκπομπών αερίων θερμοκηπίων, ανάλογα τον τομέα

Πηγή: Climate Watch, the World Resources Institute (2020)

Η μετάβαση σε στόλο ηλεκτρικών λεωφορείων ενέχει και άλλα πλεονεκτήματα, πέρα από το μηδενισμό εκπομπών. Ένα από αυτά αποτελεί η βελτίωση της ηχορύπανσης, καθώς οι ηλεκτρικοί κινητήρες είναι λιγότερο θορυβώδεις σε σημαντικό βαθμό από τους αντίστοιχους κινητήρες εσωτερικής καύσης (Tsoi et al. 2023, Boren et al. 2016, Laib et al. 2018) (Ka Ho Tsoi) (Borén). Αυτό έχει αρκετά μεγάλη σημασία σε ένα αστικό περιβάλλον, καθώς οι ταχύτητες είναι σχετικά χαμηλές, οπότε η επιρροή του κινητήρα στην ηχορύπανση είναι αρκετά αυξημένη σε σχέση με την επιρροή των αντιστάσεων κύλισης μεταξύ τροχών και οδοστρώματος (Robertson et al. 1998). Ακόμη, η κίνηση οχημάτων με ηλεκτρική ενέργεια δίνει τη δυνατότητα να αξιοποιηθούν πηγές ενέργειας της Ευρωπαϊκής Ένωσης και εγχώριες στις μεταφορές, αυξάνοντας την στρατηγική αυτονομία των εμπλεκόμενων. Βέβαια, εδώ πρέπει να αναφερθεί πως στην περίπτωση των ηλεκτρικών λεωφορείων με μπαταρία, υπάρχει το ζήτημα των σπάνιων γαιών, μέταλλα τα οποία απαιτούνται για την παραγωγή των μπαταριών, που πάλι δημιουργούν ζητήματα στρατηγικής

εξάρτησης. Η Κίνα την δεκαετία του 2000 παρήγαγε το 90% των σπάνιων γαιών παγκοσμίως. Βέβαια, με την αύξηση της ζήτησης και την επακόλουθη αύξηση της παραγωγής και της στρατηγικής τους σημασίας, αυτό το ποσοστό μειώθηκε στο 60%, το 2020 ([Vekasi 2021](#), [Kiggins 2015](#)).

Υπάρχουν 3 τύποι λεωφορείων μηδενικών εκπομπών GHG. Τα λεωφορεία υδρογόνου, τα τρόλεϊ και τα ηλεκτρικά λεωφορεία με μπαταρία (Battery Electric Buses – BEB). Η παρούσα εργασία θα ασχοληθεί με τον τελευταίο τύπο λεωφορείου. Τα ηλεκτρικά λεωφορεία με μπαταρίες, προτιμώνται από τα λεωφορεία υδρογόνου, λόγω του μειωμένου κόστους τους ([Hensher et al. 2022](#)). Ενώ, σε σχέση με τα τρόλεϊ, το βασικό πλεονέκτημα που προσφέρουν τα ηλεκτρικά λεωφορεία μπαταριών είναι ουσιαστικά το ίδιο με αυτό των συμβατικών λεωφορείων, δηλαδή η έλλειψη απαίτησης για εναέρια καλώδια. Αυτό προσφέρει μεγαλύτερη ευελιξία στη δρομολόγηση και αυξάνει τη ταχύτητα διαδρομής, αν και οι αιτίες που προκαλούν αυτή την επιβράδυνση απαιτούν περεταίρω διερεύνηση ([Matzoros & OASA, 2002](#)).

Η αναλογία των ηλεκτρικών λεωφορείων μπαταριών, στους στόλους των εταιριών αστικών συγκοινωνιών, παρουσιάζει αρκετές διαφοροποιήσεις. Το 2020, στην Κίνα, τα ηλεκτρικά λεωφορεία κατέχουν το 90% των πωλήσεων νέων λεωφορείων, αλλά το ίδιο έτος στην Ευρωπαϊκή Ένωση αποτελούν το 6% των πωλήσεων και οι το 4% των πωλήσεων στις ΗΠΑ και τον Καναδά. Βέβαια, και στις χώρες της δύσης υπάρχουν κάποιες εξαιρέσεις. Στην Ολλανδία το 81% των νέων λεωφορείων που-ταξινομήθηκαν-ήταν μηδενικών εκπομπών, και οι πωλήσεις λεωφορείων μηδενικών εκπομπών στην Καλιφόρνια, αποτελούν την μερίδα του λέοντος των πωλήσεων στις ΗΠΑ και τον Καναδά ([ICCT, 2021](#)).

Μία από τις αιτίες αυτής της μειωμένης αναλογίας, είναι πως πέρα από το κόστος που προσθέτουν, οι μπαταρίες δημιουργούν κάποιες επιπλοκές. Με την πρόοδο της τεχνολογίας των μπαταριών η αυτονομία των ηλεκτρικών λεωφορείων έχει αυξηθεί σε μεγάλο βαθμό, με αποτέλεσμα να μπορούν να πραγματοποιήσουν μεγάλο αριθμό δρομολογίων, προτού απαιτηθεί να επαναφορτίσουν. Συγκεκριμένα, οι μπαταρίες ιόντων λιθίου (Lithium-ion ή Li-ion) 18650 της Panasonic, με τις οποίες κατασκευάζονται οι μεγαλύτερες μπαταρίες οχημάτων, το 2020 είχαν φτάσει σε επίπεδο ειδικής ενέργειας 300 Wh/kg, όταν το 2010 ήταν στο επίπεδο των 250 Wh/kg ([Xu, 2020](#)). Όμως, αυτή η χωρητικότητα, συνήθως δεν αρκεί για να καλύψει τις ανάγκες δρομολόγησης μιας ολόκληρης μέρας. Αυτό σημαίνει πως το λεωφορείο πρέπει να φορτίσει μέσα στην ημέρα, αλλά η φόρτιση αυτή διαρκεί αρκετό χρόνο. Υπάρχει η δυνατότητα βραδείας φόρτισης, με μεγάλη χωρητικότητα συσσωρευτή (250-660 kWh) και ταχείας φόρτισης με μικρή χωρητικότητα συσσωρευτή (50-250 kWh) ([US DoT](#)). Ένας τυπικός συσσωρευτής βραδείας φόρτισης απαιτεί περίπου 2 ώρες για την πλήρη φόρτισή του, ενώ ένας συσσωρευτής ταχείας φόρτισης απαιτεί 20 λεπτά ([Solaris](#)).

Αυτή η ανάγκη αναμονής και σε αρκετές περιπτώσεις ανάγκη επιστροφής στο αμαξοστάσιο, για φόρτιση, σημαίνει πως τα ηλεκτρικά λεωφορεία μπαταρίας λειτουργούν με ένα διαφορετικό καθεστώς δρομολόγησης από τα συμβατικά λεωφορεία και τρόλεϊ. Αυτό το θέμα δρομολόγησης θα αναφερθεί παρακάτω στην εργασία, αλλά στην εργασία θα αναλυθεί συγκεκριμένα ο προγραμματισμός φόρτισης ηλεκτρικών λεωφορείων φόρτισης. Ακόμη, υπάρχει το ζήτημα χωροθέτησης των φορτιστών, όπου επιθυμούμε να περιορίσουμε το κόστος αγοράς τους και τον χρόνο που δαπανούν τα λεωφορεία για την μετάβαση από και προς τους φορτιστές ([Tzamakos et al. 2023](#), [He et al. 2023](#), [Hu et al. 2022](#)). Επίσης, προβληματίζει η επάρκεια του ηλεκτρικού δικτύου στους σταθμούς φόρτισης και γενικότερα η επιρροή της λειτουργίας των ηλεκτρικών

λεωφορείων στο ηλεκτρικό δίκτυο. Οι φορτιστές ταχείας φόρτισης έχουν μέγιστη ισχύ έως και 600 kW ([AL-Saadi et al. 2022](#)).

Το πρόβλημα της δρομολόγησης ηλεκτρικών λεωφορείων, γενικά μοντελοποιείται ως ένα πρόβλημα δρομολόγησης ηλεκτρικών οχημάτων (Electric Vehicle Scheduling Problem – EVSP). Αυτό με τη σειρά του αποτελεί μια τροποποίηση του προβλήματος δρομολόγησης - συμβατικών - οχημάτων (Vehicle Scheduling Problem), ενός κλασικού προβλήματος επιχειρησιακής έρευνας. Αυτό μπορεί να οριστεί ως εξής:

Δεδομένων χρόνων και θέσεων αρχής και τέλους δρομολογίων, καθώς και χρόνων διαδρομής μεταξύ όλων των αφετηριών, πρέπει να δρομολογηθούν οχήματα έτσι ώστε:

- Κάθε δρομολογημένη διαδρομή να πραγματοποιείται ακριβώς μία φορά
- Κάθε όχημα να πραγματοποιεί μια έγκυρη αλληλουχία διαδρομών
- Το συνολικό κόστος να ελαχιστοποιείται

Το κόστος μπορεί να αποτελείται από σταθερά κόστη, όπως το κόστος αγοράς οχημάτων, τα λειτουργικά, τα οποία μπορεί να εμπεριέχουν το κόστος ενέργειας, κάποια χρηματική ποσοτικοποίηση του χρόνου διαδρομής και οποιονδήποτε συνδυασμό τους ([Bunte και Kliewer, 2009](#)). Αυτό το πρόβλημα τροποποιείται για να συμπεριλάβει τις ανάγκες φόρτισης των ηλεκτρικών λεωφορείων, φροντίζοντας έτσι ώστε το επίπεδο φόρτισης (State of Charge – SoC) της μπαταρίας να βρίσκεται σε αποδεκτά επίπεδα. Αυτό επιτυγχάνεται με τη δρομολόγηση των λεωφορείων σε διαδρομές φόρτισης, μεταξύ κάποιας αφετηρίας και κάποιου σταθμού φόρτισης, ανάμεσα από 2 διαδρομές εντός υπηρεσίας.

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η βελτιστοποίηση της δρομολόγησης ηλεκτρικών λεωφορείων, με στόχο την ελαχιστοποίηση του λειτουργικού κόστους. Λαμβάνεται υπόψιν πως οι διάφορες εργασίες (δρομολόγια, φορτίσεις) πρέπει να ξεκινούν σε συγκεκριμένα χρονικά παράθυρα, υπάρχουν πολλαπλά αμαξοστάσια από τα οποία δρομολογούνται λεωφορεία, ένας φορτιστής μπορεί να χρησιμοποιηθεί από πολλά λεωφορεία, αλλά μόνο από ένα κάθε φορά. Επίσης, θεωρείται πως οι χρόνοι των δρομολογίων παρουσιάζουν τυχαιότητα. Για την επίλυση αυτού του προβλήματος αναπτύσσεται ένα γραμμικό πρόγραμμα μεικτών-ακεραίων (MILP), ενώ γίνεται η υπόθεση πως οι χρόνοι δρομολογίων ακολουθούν λογαριθμικοκανονική κατανομή. Στόχος είναι, το λειτουργικό κόστος, για το μέσο σενάριο χρόνων δρομολογίων, να ελαχιστοποιηθεί. Η επίλυση αυτού του προβλήματος εξετάζεται στο σενάριο τήρησης όλων των περιορισμών, για όλους τους πιθανούς χρόνους δρομολογίων και στα σενάρια τήρησης όλων των περιορισμών εκτός από έναν. Όπου εκείνος ο ένας περιορισμός τηρείται για διάφορα ποσοστά των καλύτερων χρόνων διαδρομής, έτσι ώστε να εξεταστεί πόσο μειώνεται το επιχειρησιακό κόστος, όσο μειώνεται η πιθανότητα το πρόγραμμα δρομολόγησης να ανταποκριθεί στις ανάγκες της δρομολόγησης.

Το υπόλοιπο της εργασίας ακολουθεί την εξής δομή:

- Στην επόμενη – τη 2^η – ενότητα γίνεται βιβλιογραφική αναφορά στα μοντέλα βελτιστοποίησης δρομολόγησης ηλεκτρικών λεωφορείων, επιλέγεται η εργασία που το μοντέλο της θα αναπτυχθεί περαιτέρω και είναι η πλησιέστερη στον σκοπό της παρούσας εργασίας, ενώ επισημαίνεται η συνεισφορά της παρούσας εργασίας.
- Στην 3^η ενότητα, το πρόβλημα και η δομή του περιγράφεται αναλυτικά και παρουσιάζεται το μοντέλο επίλυσής του.
- Στην 4^η ενότητα, παρουσιάζεται η μεθοδολογία επεξεργασίας των δεδομένων, που απαιτούνται για

τον ορισμό των παραμέτρων των κατανομών των χρόνων δρομολογίων.

- Στην 5^η ενότητα γίνεται εφαρμογή του μοντέλου και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εφαρμογής.
- Στην 6^η ενότητα η εργασία τελειώνει, με τα συμπεράσματα που εξάγονται από αυτήν, καθώς με προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.

2. Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

2.1 Βελτιστοποίηση προγραμματισμού δρομολόγησης ηλεκτρικών λεωφορείων

Η προσέγγιση του προβλήματος της βέλτιστης δρομολόγησης των ηλεκτρικών λεωφορείων διαφέρει ανάλογα με τον παράγοντα ο οποίος βελτιστοποιείται.

Ένα πεδίο έρευνας είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους ενέργειας κατά την δρομολόγηση ηλεκτρικών λεωφορείων. Οι [Zhou et al. \(2022\)](#) λαμβάνουν υπόψιν τους την ενεργειακή κατανάλωση των λεωφορείων σε κάποια διαδρομή, το κόστος εγκατάστασης και την ισχύ των φορτιστών, την μεταβολή των τιμών ενέργειας κατά τη διάρκεια της μέρας (Time of Use rates – ToU rates) και αναπτύσσουν ένα «robust» μεικτών ακεραίων γραμμικό μοντέλο προγραμματισμού (Robust Mixed-Integer Linear Program). Όπου «robust» θεωρείται ένα μοντέλο το οποίο μπορεί να λειτουργήσει και στις πιο δυσμενείς περιπτώσεις, χωρίς να επιφέρει καταστροφικά αποτελέσματα. Οι [Huang και Wang \(2022\)](#) αναφέρονται στην περίπτωση όπου, σε δίκτυο με έναν σταθμό φόρτισης, υπάρχει η επιλογή μεταξύ ταχείας φόρτισης (fast charging) και αλλαγής μπαταρίας (battery swapping), ενώ υπάρχουν ToU rates και αναπτύσσουν ένα διπλό στοχαστικό μοντέλο προγραμματισμού, όπου η κατανάλωση ενέργειας των λεωφορείων είναι στοχαστική μεταβλητή. Οι [van Kooten Niekerk et al. \(2017\)](#) εξετάζουν το πρόβλημα, με 2 μοντέλα. Στο πρώτο μοντέλο γίνονται οι παραδοχές πως ο ρυθμός φόρτισης είναι σταθερός - συναρτησει του χρόνου - και η τιμή της ενέργειας είναι σταθερή κατά τη διάρκεια της ημέρας. Ενώ στο δεύτερο, θεωρείται πως ο ρυθμός φόρτισης μεταβάλλεται, όπως και η τιμή της ενέργειας και λαμβάνεται επίσης υπόψιν το κόστος απόσυρσης των μπαταριών. Οι [Wu et al. \(2022\)](#) λαμβάνουν υπόψιν στην ερευνά τους, πέρα από τις διακυμάνσεις τιμών (ToU rates) και τη διακινδύνευση του ηλεκτρικού δικτύου, εξαιτίας των φορτίων αιχμών. Οπότε, δημιουργούν ένα διπλό μοντέλο μικτών ακεραίων, όπου στο πρώτο μέρος ο στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του λειτουργικού κόστους και στο δεύτερο η ελαχιστοποίηση του μέγιστου φορτίου ενέργειας φόρτισης. Οι [Huang et al. \(2023\)](#) εξετάζουν την περίπτωση του προβλήματος, όπου οι σταθμοί φόρτισης υποστηρίζουν τόσο την ενσύρματη φόρτιση (plug-in charging), όσο και την αλλαγή μπαταρίας (battery swapping). Ακόμη, συσυπολογίζονται η επιρροή της κυκλοφορίας στη κατάσταση φόρτισης της μπαταρίας και η διακύμανση των τιμών ενέργειας (ToU rates). Η αβεβαιότητα της κυκλοφορίας αντιμετωπίζεται μέσω ενός μοντέλου δρομολόγησης «Robust Optimization», όπου στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους ενέργειας.

Άλλος ένας παράγοντας βελτιστοποίησης είναι το κόστος αγοράς εξοπλισμού. Οι [Liu και Ceder \(2020\)](#) μελετούν το πρόβλημα δρομολόγησης ηλεκτρικών λεωφορείων, με κύριο στόχο την ελαχιστοποίηση του απαιτούμενου αριθμού ηλεκτρικών λεωφορείων και δευτερεύοντα στόχο την ελαχιστοποίηση των απαιτούμενων φορτιστών. Ενώ η εργασία διατυπώνει το πρόβλημα με ένα διπλό διακριτό μοντέλο προγραμματισμού, χρησιμοποιεί και έναν εναλλακτικό τρόπο διατύπωσης, τη θεωρία «deficit function».

Ένα μη-αμελητέο μέρος της έρευνας αφορά μια ολιστική θεώρηση του κόστους, όπου επιχειρείται να ελαχιστοποιηθούν τόσο τα άμεσα χρηματικά κόστη, όπως το κόστος αγοράς εξοπλισμού και το κόστος ενέργειας, όσο και τα κόστη που δεν μεταφράζονται άμεσα σε χρηματικά κόστη, όπως τον χρόνο διαδρομής. Οι [Bie et al. \(2021\)](#) μελετούν την περίπτωση όπου ο χρόνος διαδρομής και η ενεργειακή κατανάλωση των λεωφορείων μεταβάλλονται στοχαστικά και δημιουργούν ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού, με στόχο, την ελαχιστοποίηση του κόστους ενέργειας, την ελαχιστοποίηση των καθυστερήσεων και του κόστους αγοράς λεωφορείων. Οι [Li et al. \(2020\)](#) εξετάζουν την επιρροή της μερικής φόρτισης (partial charging) και των διακύμανσης του κόστους ενέργειας (ToU rates) στο πρόβλημα της δρομολόγησης ηλεκτρικών λεωφορείων και εγκατάστασης ηλεκτρικών φορτιστών και το επιλύουν με τη μέθοδο «adaptive genetic algorithm». Οι [Wang et al. \(2017\)](#) αναφέρονται στο πρόβλημα, με σταθμούς ταχείας φόρτισης σε κεντρικές στάσεις του δικτύου και στοχεύουν στην ελαχιστοποίηση του κόστους αγοράς των φορτιστών, του κόστους φόρτισης και του κόστους διαδρομών. Οι [Bruglieri et al. \(2015\)](#) μελετούν το πρόβλημα δρομολόγησης ηλεκτρικών λεωφορείων, με στόχο την ελαχιστοποίηση του χρόνου διαδρομών, αναμονής και επαναφόρτισης, καθώς και την ελαχιστοποίηση των απαιτούμενων λεωφορείων. Το πρόβλημα μοντελοποιείται με ένα μεικτών ακεραίων γραμμικό μοντέλο προγραμματισμού και με την μέθοδο «Variable Neighborhood Search Branching». Η δεύτερη μέθοδος παράγει αρκετά καλές λύσεις σε σχέση με την πρώτη και με χρόνο υπολογισμού περίπου 3 με 15 φορές χαμηλότερο από την πρώτη.

Το πρόβλημα δρομολόγησης ηλεκτρικών λεωφορείων, με πάνω από έναν τύπο λεωφορείου, επίσης προσελκύει ερευνητικό ενδιαφέρον. Οι [Picarelli et al. \(2019\)](#) μελετούν την επιρροή της αναλογίας των ηλεκτρικών λεωφορείων, έναντι των συμβατικών, στη δρομολόγηση, με στόχο την ελαχιστοποίηση του επιχειρησιακού κόστους. Η έρευνα τους δείχνει πως το επιχειρησιακό κόστος μειώνεται με την αυξημένη διείσδυση των ηλεκτρικών λεωφορείων στον στόλο, παρά την ανάγκη τους για χρόνο φόρτισης. Σε παρόμοια κατεύθυνση, οι [Yildirim και Yildiz \(2021\)](#) εξετάζουν την βελτιστοποίηση της ποσόστωσης λεωφορείων ταχείας φόρτισης (fast charging) και Δυναμικής Ασύρματης Μεταφοράς Ισχύος (Dynamic Wireless Power Transfer), ώστε να επιτευχθεί ελάχιστο κόστος αγοράς και λειτουργίας. Οι [Zhou et al. \(2020\)](#) αναφέρονται στη περίπτωση όπου δρομολογούνται συμβατικά λεωφορεία, παράλληλα με ηλεκτρικά λεωφορεία βραδείας φόρτισης. Δημιουργούν ένα διπλό μοντέλο προγραμματισμού, όπου στο πρώτο τμήμα ο στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του λειτουργικού κόστους, ταυτόχρονα με τις εκπομπές άνθρακα, ενώ στο δεύτερο τμήμα στόχο αποτελεί η ελαχιστοποίηση του κόστους φόρτισης, καθώς λαμβάνονται υπόψιν οι διακυμάνσεις των τιμών ενέργειας (ToU rates). Οι [Rogge et al. \(2018\)](#) μελετούν την περίπτωση του προβλήματος, όπου δρομολογούνται ηλεκτρικά λεωφορεία με διαφορετικά χαρακτηριστικά μπαταριών. Στόχος είναι ελαχιστοποίηση του κόστους αγοράς λεωφορείων, του ενεργειακού και λοιπού λειτουργικού κόστους.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν έρευνες που εστιάζουν σε συγκεκριμένες πτυχές της δρομολόγησης ηλεκτρικών λεωφορείων. Οι [Tang et al. \(2019\)](#) αναφέρονται στην τυχαιότητα που εμπεριέχουν οι χρόνοι διαδρομής, εξαιτίας κυκλοφοριακών παραγόντων, οπότε και αναπτύσσουν 2 μοντέλα δρομολόγησης ηλεκτρικών λεωφορείων, ένα στατικό και ένα δυναμικό, με στόχο να περιοριστούν οι καθυστερήσεις και τυχόν εξαντλήσεις μπαταρίας. Το στατικό μοντέλο εξασφαλίζει την φόρτιση των λεωφορείων με περίσσεια ενέργειας, ώστε η δρομολόγηση να παραμένει σε αποδεκτή ποιότητα, παρά την τυχαιότητα της κυκλοφορίας. Ενώ το δυναμικό μοντέλο επανασχεδιάζει σε τακτικά χρονικά διαστήματα, κατά τη διάρκεια της ημέρας, τα

δρομολόγια, με βάση τις επικρατούσες κυκλοφοριακές συνθήκες. Οι [Xu et al. \(2023\)](#) εξετάζουν την σύνδεση του προβλήματος δρομολόγησης ηλεκτρικών λεωφορείων (Electric Vehicle Scheduling Problem), με το πρόβλημα δρομολόγησης ενός δικτύου μεταφορών (Transit Network Timetabling), όπου στόχος είναι η μεταφορά του μέγιστου αριθμού επιβατών με το μικρότερο δυνατό λειτουργικό κόστος. Για αυτό τον σκοπό αναπτύσσουν ένα μοντέλο «multi-commodity flow».

2.2 Βελτιστοποίηση προγραμματισμού φόρτισης ηλεκτρικών λεωφορείων, με βάση τον χρόνο εκτός υπηρεσίας

Μια σημαντική πτυχή αυτού του προβλήματος είναι η ελαχιστοποίηση του χρόνου εκτός υπηρεσίας των ηλεκτρικών λεωφορείων, καθώς εγκαταλείπουν προσωρινά την γραμμή στην οποία είναι δρομολογημένα και μετακινούνται προς/από ένα αμαξοστάσιο ή τερματικό σταθμό, όπου και φορτίζουν. Οι [Gkiotsalitis et al. \(2023\)](#) εξέτασαν την περίπτωση, όπου τα ηλεκτρικά λεωφορεία μπορούν να φορτίσουν σε συμβατικούς σταθμούς φόρτισης μιας πόλης, με στόχο να ελαχιστοποιηθούν τα κόστη που σχετίζονται με την αναμονή. Για αυτόν τον σκοπό αναπτύχθηκε ένα μικτών ακεραίων μη-γραμμικό μοντέλο προγραμματισμού (Mixed-Integer Non-Linear Program), το οποίο γραμμικοποιείται με τον μετασχηματισμό της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών. Στο μετασχηματισμό των περιορισμών δημιουργούνται περιορισμοί όπου οι μεταβλητές απόφασης δεν πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους. Ενώ κατά τον μετασχηματισμό της αντικειμενικής συνάρτησης, αυτή μετατρέπεται σε μια συνάρτηση με ένα όρο που λαμβάνει συνεχείς τιμές. Οι τιμές αυτού του όρου ορίζονται με γραμμικούς περιορισμούς. Οι περιορισμοί αφορούν την εγκυρότητα των δρομολογημένων διαδρομών, την επάρκεια φόρτισης των λεωφορείων κατά την δρομολόγησή τους και την έγκυρη χρήση των φορτιστών. Οι μεταβλητές απόφασης είναι η επιλογή των συνδέσμων διαδρομών των λεωφορείων (η χωρική διάσταση αυτού του είδους προβλήματος μοντελοποιείται με ένα γράφο, όπου οι κόμβοι αποτελούνται από αφετηρίες γραμμών και αμαξοστάσια και οι σύνδεσμοι από τις διαδρομές μεταξύ των αφετηριών και αμαξοστασίων και οποιονδήποτε συνδυασμό τους), τα χρονικά διαστήματα πραγματοποίησης διαδρομών, η επιλογή μιας διαδρομής για φόρτιση και η κατάσταση φόρτισης κατά τη διάρκεια των διαδρομών. Το μοντέλο λύνεται με τη χρήση των ακριβών μεθόδων branch-and-cut και dual simplex, χρησιμοποιώντας συνθετικά δεδομένα, παρόμοια με αυτά των [Carpaneto et al. \(1989\)](#).

Οι [Jiang et al. \(2021\)](#) ασχολούνται με την περίπτωση προβλήματος δρομολόγησης ηλεκτρικών λεωφορείων πολλαπλών αμαξοστασίων (Multi-Depot Electric Vehicle Scheduling Problem, MDEVSP εφεξής), με μεταβλητό κόστος ενέργειας, όπου εισάγεται αβεβαιότητα στον χρόνο διαδρομής. Ο στόχος είναι να μειωθούν τα κόστη που αφορούν την επιλογή διαδρομών και την φόρτιση, συγκρατώντας τις καθυστερήσεις. Αναπτύσσεται ένα robust μικτών ακεραίων γραμμικό μοντέλο προγραμματισμού (Robust-MILP), το οποίο λύνεται με την ακριβή μέθοδο branch-and-cut. Οι μεταβλητές απόφασης αφορούν στην επιλογή συνδέσμων των διαδρομών και το ποσοστό φόρτισης μεταξύ διαδρομών. Οι περιορισμοί αφορούν την εγκυρότητα των διαδρομών, τον χρονικό περιορισμό διαδρομών και φόρτισης και τα άνω και κάτω όρια κατάστασης φόρτισης. Το μοντέλο εφαρμόζεται σε δίκτυα μίας, τριών και τεσσάρων γραμμών στο Σεντζέν της Κίνας.

Οι [Chau et al. \(2024\)](#) εξετάζουν το MDEVSP, όπου φορτιστές μιας θέσης αντικαθίστανται με φορτιστές πολλών θέσεων, οι οποίοι φορτίζουν με μειωμένη ισχύ όταν εξυπηρετούν πάνω από ένα λεωφορείο. Για την επίλυσή του αναπτύσσουν ένα μικτό-ακέραιο μη-γραμμικό μοντέλο προγραμματισμού, το οποίο στη συνέχεια

γραμμικοποιείται με τον μετασχηματισμό των περιορισμών, στοχεύοντας στην ελαχιστοποίηση των συνολικών καθυστερήσεων στο δίκτυο γραμμών. Μεταβλητές απόφασης αποτελούν οι σύνδεσμοι των διαδρομών, οι προγραμματισμένοι χρόνοι διαδρομών, η επιλογή μιας διαδρομής για φόρτιση και η κατάσταση φόρτισης των λεωφορείων. Το πρόβλημα λύνεται με τις ακριβείς μεθόδους branch-and-cut και dual simplex. Η εφαρμογή του σε δίκτυο παίγνιο (toy network) και στα συνθετικά δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν στην εργασία Gkiotsalitis et al. (2023), δείχνουν πως, σε σχέση με την χρήση μονοθέσιων φορτιστών, απαιτούνται λιγότερα λεωφορεία για το ίδιο πρόγραμμα δρομολογίων, αλλά ο υπολογιστικός φόρτος είναι πολύ μεγαλύτερος (2000% αύξηση).

Οι [Wen et al. \(2016\)](#) χρησιμοποιούν την ευρετική μέθοδο adaptive large neighborhood search για να λύσουν το MDEVSP, όπου τα οχήματα έχουν την δυνατότητα να φορτίσουν είτε πλήρως ή μερικώς. Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση των απαιτούμενων οχημάτων και ύστερα η ελαχιστοποίηση της απόστασης των διαδρομών εκτός υπηρεσίας. Ως εκ τούτου, αναπτύσσεται ένα μοντέλο προγραμματισμού μικτών-ακεραίων. Η μεταβλητή απόφασης είναι η επιλογή των συνδέσμων διαδρομής του κάθε λεωφορείου. Το πρόβλημα εφαρμόζεται σε συνθετικά δεδομένα, τα οποία παράγονται με μεθοδολογία παρόμοια με αυτή που συναντάται στην Carpaneto et al. (1989). Η ευρετική μέθοδος παράγει αποτελέσματα είτε βέλτιστα ή πολύ κοντά στα βέλτιστα για μικρό αριθμό δρομολογίων και καλά αποτελέσματα για μεγάλο αριθμό δρομολογίων.

Σε παρόμοια κατεύθυνση κινούνται οι [Wang et al. \(2021\)](#), όπου χρησιμοποιείται η ευρετική μέθοδος column generation, βασισμένη όμως σε γενετικό αλγόριθμο, για να λυθεί το MDEVSP. Για να γίνει μια πρώτη διαλογή των στηλών δεδομένων (columns), αναπτύσσεται ένα δυαδικό γραμμικό μοντέλο προγραμματισμού με στόχο την ελαχιστοποίηση του κόστους αγοράς οχημάτων, δηλαδή την ελαχιστοποίηση των απαιτούμενων οχημάτων, του κόστους φόρτισης και του επιχειρησιακού κόστους, που σχετίζεται με τον χρόνο διαδρομής και αναμονής. Η μεταβλητή απόφασης είναι η επιλογή μιας στήλης δεδομένων (column) οι περιορισμοί αφορούν την κάλυψη όλων των δρομολογίων από ένα ακριβώς όχημα και την χωρητικότητα των αμαξοστασίων. Το μοντέλο εφαρμόζεται σε ένα δίκτυο 3 γραμμών και 3 αμαξοστασίων στο Qingdao της Κίνας, όπου συμπεραίνεται πως η μέθοδος επίλυσης της εργασίας είναι περίπου 40 φορές πιο γρήγορη από τον αλγόριθμο branch-and-price.

Οι [Wang & Shen \(2007\)](#) εφαρμόζουν την ευρετική μέθοδο ant colony algorithm για να λύσουν το MDEVSP. Ο κύριος στόχος είναι η ελαχιστοποίηση των απαιτούμενων λεωφορείων και σε δεύτερη φάση η ελαχιστοποίηση του χρόνου εκτός υπηρεσίας. Αναπτύσσεται ένα δυαδικό γραμμικό μοντέλο προγραμματισμού, με μεταβλητή απόφασης την επιλογή συνδέσμων διαδρομής. Οι περιορισμοί αφορούν την εγκυρότητα των διαδρομών, την τήρηση της χωρητικότητας στα αμαξοστάσια και την επάρκεια φόρτισης κατά την διαδρομή. Εξετάζεται με το μοντέλο ένα δίκτυο με 3 γραμμές και 3 αμαξοστάσια.

Το πρόβλημα προγραμματισμού φόρτισης εμφανίζεται και στο σχεδιασμό της υποδομής, δηλαδή την επιλογή θέσης εγκατάστασης φορτιστών. Οι [Iliopoulou και Kepaptsoglou \(2021\)](#), ταυτόχρονα με την επιλογή θέσης φορτιστών, εξετάζουν και την χάραξη γραμμών λεωφορείων, υπό συνθήκες μεταβαλλόμενης προσφοράς ενέργειας φόρτισης και ουρών στους σταθμούς φόρτισης, οι οποίοι τοποθετούνται σε στάσεις στο δίκτυο. Αναπτύσσεται ένα διπλό μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού μικτών ακεραίων μη-γραμμικό. Το μοντέλο έχει 2 στόχους: την ελαχιστοποίηση των καθυστερήσεων και την ελαχιστοποίηση των απαιτούμενων θέσεων

φόρτισης. Το πρώτο τμήμα του μοντέλου έχει μεταβλητές απόφασης που σχετίζονται με την επιλογή διαδρομών και οι περιορισμοί αφορούν την εξασφάλιση της εγκυρότητας των δρομολογίων και το μέγιστο μήκος μιας γραμμής. Το δεύτερο τμήμα του μοντέλου έχει ως μεταβλητές απόφασης την επιλογή μιας τοποθεσίας για τοποθέτηση φορτιστή, με τους περιορισμούς, πως πρέπει να υπάρχει μόνο ένας φορτιστής σε κάθε θέση και πως η κατάσταση φόρτισης πρέπει να διατηρείται σε αποδεκτά επίπεδα. Η επίλυση γίνεται με τη μεταερευτική μέθοδο *particle swarm optimization* και ως παράδειγμα χρησιμοποιούνται συνθετικά δεδομένα από την εργασία Mumford (2013).

Οι **Uslu και Kaya (2021)** επίσης αναφέρονται στο πρόβλημα εγκατάστασης φορτιστών, με πεδίο εφαρμογής το υπεραστικό δίκτυο λεωφορείων της Τουρκίας. Αναπτύσσουν ένα μικτών ακεραίων γραμμικό μοντέλο προγραμματισμού, με στόχο την μείωση του κόστους εγκατάστασης των φορτιστών, τη μείωση του επιχειρησιακού κόστους και τη μείωση των ενδιάμεσων στάσεων που πρέπει να πραγματοποιηθούν. Κατά τον υπολογισμό του επιχειρησιακού κόστους, υπολογίζονται οι καθυστερήσεις που προκύπτουν λόγω αναμονής σε ουρά, στους σταθμούς φόρτισης, με θεωρία ουρών. Γίνεται η παραδοχή πως τα λεωφορεία ξεκινούν το κάθε δρομολόγιο πλήρως φορτισμένα. Οι μεταβλητές απόφασης αφορούν την επιλογή θέσεων για εγκατάσταση φορτιστή, την επιλογή θέσης για στάση κάποιου λεωφορείου και μεταβλητές σχετικά με την κατάσταση φόρτισης των λεωφορείων και τον ρυθμό εξυπηρέτησης λεωφορείων των στάσεων. Οι περιορισμοί αφορούν την εγκυρότητα των διαδρομών, τις δυνατότητες εξυπηρέτησης λεωφορείων κάθε σταθμού και την διατήρηση των καθυστερήσεων σε αποδεκτά επίπεδα. Η επίλυση πραγματοποιείται με το λογισμικό “Cplex”.

2.3 Κατανομές διακύμανσης χρόνου διαδρομής λεωφορείων

Ο πραγματικός χρόνος δρομολογίων λεωφορείων, αποτελεί μια παράμετρο η οποία ενέχει μια αβεβαιότητα. Όμως παρατηρείται ένα μοτίβο. Οι χρόνοι διαδρομής και οι χρόνοι αφίξεων τείνουν να ακολουθήσουν μια κατανομή η οποία παρουσιάζει μια κύρτωση προς τα δεξιά. Δηλαδή, τα λεωφορεία καθυστερούν πιο συχνά από ότι φτάνουν νωρίτερα. Πιο συγκεκριμένα, ο **Turnquist (1978)**, προτείνει την χρήση την λογαριθμο-κανονικής κατανομής, καθώς παρουσιάζει αυτή την χαρακτηριστική κύρτωση, ενώ οι **Stratham & Hopper (1992)** αναφέρουν πως τα δεδομένα αφίξεων, που έχουν λάβει από το Portland του Oregon, ταιριάζουν με την παραπάνω κατανομή. Οι **Guenther & Hamat (1988)**, εξετάζουν την κατανομή των δεδομένων αφίξεων λεωφορείων στο Milwaukee του Wisconsin, όπου και προκύπτει πως δεν ακολουθούν την λογαριθμο-κανονική κατανομή, αλλά την γάμμα. Ο **Stathopoulos (2004)** επίσης αναφέρει την λογαριθμο-κανονική κατανομή και την γάμμα ως κατάλληλες για την περιγραφή της διακύμανσης των χρονικών διαχωρισμών. Οι **Rahman et al. (2018)** συμπεραίνουν, σύμφωνα με δεδομένα γραμμών από το Calgary του Καναδά, πως για αποστάσεις μέχρι 7-8 km η λογαριθμο-κανονική κατανομή είναι κατάλληλη για την περιγραφή της διακύμανσης του χρόνου διαδρομής ενός λεωφορείου, ενώ για μεγαλύτερες αποστάσεις, η κανονική είναι η κατάλληλη. Οι **Ma et al. (2015)** αξιοποιούν δεδομένα από το Brisbane της Αυστραλίας και αναπτύσσουν μοντέλα πρόβλεψης χρόνων διαδρομών λεωφορείων, με αθροίσματα κανονικών κατανομών (Gaussian Mixture Models). Ταυτόχρονα, αναφέρουν πως η χρήση της λογαριθμο-κανονικής κατανομής αποτελεί κοινή πρακτική για εκείνο τον σκοπό.

Στον παρακάτω πίνακα 2-1 αναφέρονται κάποια βασικά στοιχεία της βιβλιογραφικής ανασκόπησης

διευκρινίζοντας τους στόχους για κάθε μελέτη που αναφέρθηκε, τα μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν και τις μεθόδους επίλυσης.

Πίνακας 2-1. Βασικά στοιχεία βιβλιογραφίας

Επιστημονική εργασία (έτος)	Στόχος	Τύπος Μοντέλου	Μέθοδος Επίλυσης	Δίκτυο Εφαρμογής
Gkiotsalitis et al. (2023)	Μείωση χρόνων εκτός υπηρεσίας	Διακριτό Γραμμικό Μοντέλο (MILP)	Ακριβείς μέθοδοι - Branch-and-cut & Dual Simplex	Ιδεατά Δεδομένα (Carpaneto et al. 1989)
Jiang et al. (2021)	Μείωση κόστους διαδρομών και φορτίσεων	Robust MILP	Ακριβής μέθοδος - Branch-and-cut	Σενζτέν, Κίνα – Δίκτυα 1,3,4 γραμμών
Chau et al. (2024)	Μείωση καθυστερήσεων στο δίκτυο	MILP	Ακριβείς μέθοδοι - Branch-and-cut & Dual Simplex	Ιδεατά Δεδομένα (Carpaneto et al. 1989)
Wen et al. (2016)	Μείωση αριθμού οχημάτων και απόστασης διαδρομών εκτός υπηρεσίας	Μοντέλο Μικτών Ακεραίων	Ευρετική μέθοδος Adaptive large neighborhood search	Ιδεατά Δεδομένα (Carpaneto et al. 1989)
Wang et al. (2021)	Μείωση κόστους αγοράς λεωφορείων, φόρτισή τους και διαδρομών τους	Δυαδικό Γραμμικό Μοντέλο	Ευρετική μέθοδος Column generation, βασισμένη σε γενετικό αλγόριθμο	Qingdao, Κίνα – Δίκτυο 3 γραμμών 3 αμαξοστασίων
Wang & Shen (2007)	Μείωση αριθμού λεωφορείων και χρόνου εκτός υπηρεσίας	Δυαδικό Γραμμικό Μοντέλο	Ευρετική μέθοδος Ant colony algorithm	Ιδεατά δεδομένα - Δίκτυο 3 γραμμών 3 αμαξοστασίων
Ιλιοπούλου & Κεραρτσόγλου (2021)	Μείωση θέσεων φόρτισης & καθυστερήσεων	Μικτών Ακεραίων Μη-Γραμμικό Διπλό Μοντέλο	Μεταευρετική μέθοδος – Particle swarm optimization	Ιδεατά δεδομένα (Mumford 2013)
Uslu & Kaya (2021)	Μείωση κόστους εγκατάστασης φορτιστών, επιχειρησιακού κόστους και στάσεων δρομολογίων	MILP	Ακριβής μέθοδος – Λογισμικό «Cplex»	Τουρκία – Δίκτυο υπεραστικών λεωφορείων

Στον παρακάτω πίνακα 2-2, παρουσιάζονται τα σημεία συνεισφοράς της παρούσας και παρακείμενων εργασιών.

Πίνακας 2-2. Στοιχεία συνεισφοράς εργασιών

Επιστημονική εργασία (έτος)	Τοποθεσία Φορτιστών	Χρονικά Παράθυρα	Αβέβαιοι Χρόνοι Διαδρομών	Ελαχιστοποίηση Αναμονής	Μη-αποκλειστική χρήση εμπορικών solver	Περιορισμοί Πιθανότητας
Gkiotsalitis et al. (2023)	Σταθμοί Φόρτισης	✓		✓		
Jiang et al. (2021)	Αμαξοστάσια	✓	✓		✓	
Chau et al. (2024)	Σταθμοί Φόρτισης	✓		✓		
Wen et al. (2016)	Σταθμοί Φόρτισης	✓			✓	
Wang et al. (2021)	Σταθμοί Φόρτισης				✓	
Wang & Shen (2007)	Αμαξοστάσια	✓		✓	✓	
Ilioroulou & Kerpaptsoglou (2021)	Τερματικοί Σταθμοί			✓	✓	
Uslu & Kaya (2021)	Τερματικοί Σταθμοί			✓		
Παρούσα Εργασία	Σταθμοί Φόρτισης	✓	✓	✓		✓

Η πλησιέστερη εργασία στην παρούσα, είναι η εργασία των Gkiotsalitis et al. (2023), καθώς είναι το μοντέλο εκείνης της εργασίας πάνω στο οποίο θα στηριχθεί και αυτή η εργασία. Η κύρια διαφορά αυτής με την εργασία των Gkiotsalitis et al. είναι η θεώρηση πως οι χρόνοι δρομολογίων \tilde{t}_i είναι τυχαίοι και συγκεκριμένα πως ακολουθούν λογαριθμο-κανονική κατανομή. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, να απαιτούνται αλλαγές στη διατύπωση μερικών περιορισμών, αλλά και στη μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης. Με την εισαγωγή πολλαπλών εκδοχών S για κάθε χρόνο δρομολογίου \tilde{t}_i^S , ο στόχος της αντικειμενικής συνάρτησης δεν αποτελεί απλώς η ελαχιστοποίηση του επιχειρησιακού κόστους, αλλά η ελαχιστοποίηση του μέσου επιχειρησιακού κόστους, για S εκδοχές των χρόνων δρομολογίων \tilde{t}_i^S . (αποκάτω)

3. Μεθοδολογία

3.1.1 Το πρόβλημα δρομολόγησης ηλεκτρικών λεωφορείων, πολλαπλών αμαξοστασιών, με χρονικά παράθυρα

Ως εισαγωγή στην ενότητα της μεθοδολογίας, παρουσιάζονται τα τμήματα της διατύπωσης του προβλήματος της εργασίας των Gkiotsalitis et al. (2023), που είναι σχετικά στην παρούσα εργασία.

Έστω πως K είναι το σύνολο των διαθέσιμων λεωφορείων (οχημάτων, εφεξής). Σε κάθε όχημα $k \in K$ αντιστοιχεί ένα δίκτυο $G^k = (N^k, A^k)$. N^k είναι οι κόμβοι του δικτύου, ενώ A^k οι σύνδεσμοί του. Σε αυτή την αναπαράσταση του δικτύου κάθε κόμβος σχετίζεται με μία προγραμματισμένη διαδρομή, με

συγκεκριμένες θέσεις αρχής και τέλους, ενώ οι σύνδεσμοι αναπαριστούν την μετάβαση κάποιου οχήματος μεταξύ 2 διαδρομών. Κάθε διαδρομή πρέπει να εξυπηρετείται από ακριβώς ένα όχημα

Οι κόμβοι του δικτύου χωρίζονται στις εξής κατηγορίες:

- Υπηρεσίας
- Προέλευσης
- Προορισμού
- Φόρτισης

Το σύνολο των ενδεχόμενων κόμβων υπηρεσίας, συμβολίζεται ως V , όπου ο κόμβος $i \in V$ αντιστοιχεί σε μία διαδρομή εντός υπηρεσίας – δρομολόγιο, εφεξής. Σε αυτό το κόμβο υπηρεσίας, επίσης αντιστοιχεί ένα χρονικό παράθυρο $[l_i, u_i]$, όπου l_i και u_i υποδηλώνουν το ελάχιστο και το μέγιστο, αντίστοιχα, χρόνο έναρξης του δρομολογίου.

Κάθε όχημα k εκκινεί και τελειώνει τις διαδρομές της ημέρας στο ίδιο αμαξοστάσιο, ενώ το ίδιο όχημα δεν μπορεί να αναχωρήσει και να επιστρέψει στο αμαξοστάσιο του, πάνω από μία φορά. Το αμαξοστάσιο συνυφασμένο με το όχημα k διατυπώνεται με κόμβους προέλευσης και προορισμού o_k και d_k , αντίστοιχα. Τα σύνολα O και D συμβολίζουν τα σύνολα αμαξοστασίων προέλευσης και προορισμού, αντίστοιχα. Στα αμαξοστάσια προέλευσης τα χρονικά παράθυρα $[l_i, u_i]$, $i \in O$ δηλώνουν τα όρια του χρόνου αναχώρησης από το αμαξοστάσιο, ενώ στα αμαξοστάσια προορισμού τα χρονικά παράθυρα $[l_i, u_i]$, $i \in D$ δηλώνουν τα όρια του χρόνου άφιξης στο αμαξοστάσιο.

Λαμβάνοντας υπόψιν τις ανάγκες φόρτισης των ηλεκτρικών λεωφορείων, το πρόβλημα διατυπώνεται έτσι ώστε τα οχήματα να μεταβαίνουν σε σταθμούς φόρτισης, όταν το επίπεδο φόρτισής τους γίνεται χαμηλό. Οι παραδοχές που γίνονται σχετικά με την φόρτιση είναι πως:

- τα οχήματα είναι πλήρως φορτισμένα στην αρχή της ημέρας
- κάθε σταθμός φόρτισης μπορεί να χρησιμοποιηθεί από όλα τα οχήματα, αλλά ένας σταθμός φόρτισης δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί από παραπάνω από ένα όχημα ταυτόχρονα
- όλοι οι σταθμοί φόρτισης έχουν τον ίδιο ρυθμό φόρτισης
- τα οχήματα επαναφορτίζουν μέχρι το μέγιστο επιτρεπόμενο επίπεδο φόρτισης, κάθε φορά που φορτίζουν

Έστω πως υπάρχει το σύνολο σταθμών φόρτισης Z στο δίκτυο και πως F είναι το σύνολο όλων των πιθανών γεγονότων φόρτισης. Κάθε πιθανό γεγονός φόρτισης $i \in F$ μπορεί να αρχίσει μέσα στο χρονικό παράθυρο $[l_i, u_i]$. Τα γεγονότα φόρτισης που είναι συνυφασμένα με τον σταθμό φόρτισης $z \in Z$, δημιουργούν ένα υποσύνολο $F^z \subseteq F$.

Κάθε γεγονός φόρτισης είναι διαθέσιμο σε όλα τα οχήματα, όπως και κάθε αμαξοστάσιο, οπότε το σύνολο των πιθανών διαδρομών ενός οχήματος $k \in K$, αναπαρίσταται από το σύνολο:

$$N^k = \{V^k \cup F \cup \{o_k, d_k\}\}$$

Με $V^k \subseteq V$ συμβολίζονται τα δρομολόγια που μπορούν να πραγματοποιηθούν από το όχημα k και είναι υποσύνολο του συνόλου όλων των δρομολογίων V . Συνεπώς, το σύνολο των κόμβων που είναι διαθέσιμο σε όλα τα οχήματα είναι:

$$N = \{V \cup F \cup O \cup D\}$$

Οπότε, συνεπάγεται πως $N^k \subseteq N$.

Για ένα όχημα $k \in K$, οι εφικτοί σύνδεσμοι του δικτύου χωρίζονται στις εξής κατηγορίες:

- Εκκίνησης: $A_1^k = (o_k, j), \forall j \in N^k - \{o_k\}$
- Τερματισμού: $A_2^k = (j, d_k), \forall j \in N^k - \{o_k, d_k\}$
- Μετάβασης μεταξύ δρομολογίων: $A_3^k = (i, j), \forall i \in V^k, \forall j \in V^k - \{i\}$
- Μετάβασης από δρομολόγιο σε σταθμό φόρτισης: $A_4^k = (i, j), \forall i \in V^k, \forall j \in F$
- Μετάβασης από σταθμό φόρτισης σε δρομολόγιο: $A_5^k = (i, j), \forall i \in F, \forall j \in V^k$

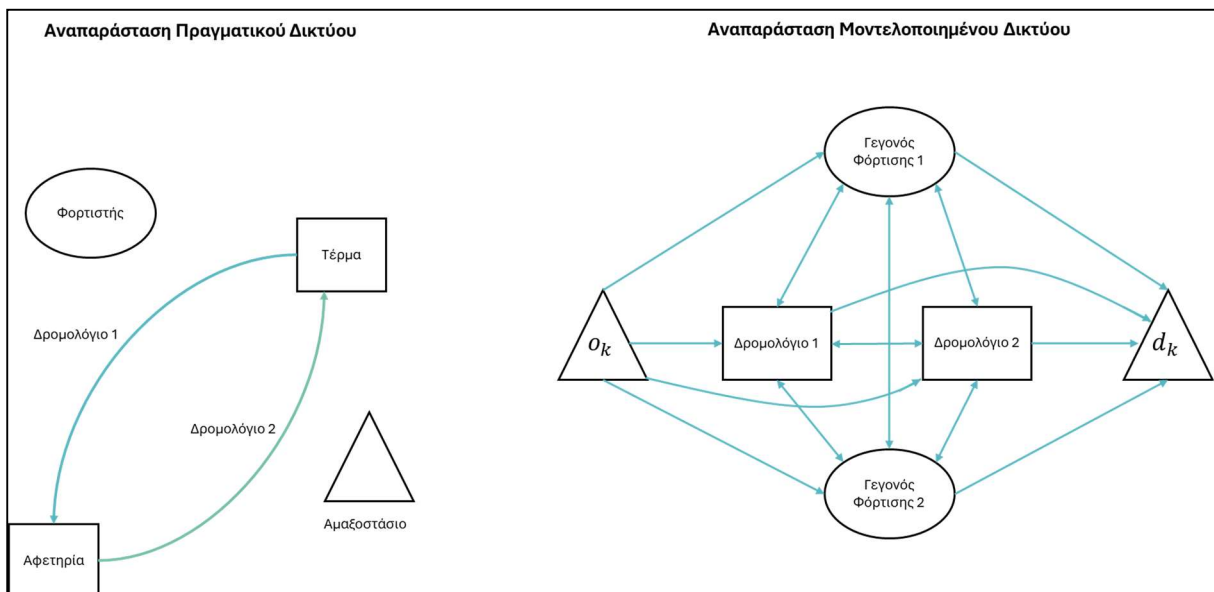
Οι σύνδεσμοι εκκίνησης είναι οι σύνδεσμοι μετάβασης από αμαξοστάσιο προέλευσης σε δρομολόγιο και οι σύνδεσμοι τερματισμού από δρομολόγιο σε αμαξοστάσιο προορισμού.

Το σύνολο των συνδέσμων του δικτύου, που αντιστοιχεί σε ένα όχημα $k \in K$ είναι:

$$A^k = \{A_1^k \cup A_2^k \cup A_3^k \cup A_4^k \cup A_5^k\}$$

Αν το όχημα εκείνο χρησιμοποιεί κάποιο σύνδεσμο $(i, j) \in A^k$, αυτό δηλώνεται με την δυαδική μεταβλητή x_{ij}^k . $x_{ij}^k = 1$ εάν το όχημα χρησιμοποιεί τον σύνδεσμο, ειδάλως $x_{ij}^k = 0$.

Σε αυτό το σημείο είναι καλό να σημειωθούν οι διαφορές της αναπαράστασης ενός δικτύου με το μοντέλο, σε σύγκριση με την πραγματικότητα. Δύο δρομολόγια μπορεί να αφορούν την ίδια γραμμή, δηλαδή να βρίσκονται στον ίδιο χώρο. Όμως, εφόσον χρονικά διαφέρουν, στο μοντέλο αναπαρίστανται με διαφορετικούς κόμβους. Επίσης, 2 γεγονότα φόρτισης μπορεί να συμβαίνουν στον ίδιο σταθμό φόρτισης. Αλλά, λόγω της χρονικής τους διαφοράς, πάλι αναπαρίστανται με διαφορετικούς κόμβους. Ακόμη, τα παραπάνω συνεπάγονται πως σύνδεσμοι που αφορούν ίδιες διαδρομές (π.χ. μετάβαση μεταξύ δρομολογίων, μετάβαση μεταξύ δρομολογίου και γεγονότος φόρτισης), αλλά σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, διαφέρουν μεταξύ τους, καθώς συνδέουν διαφορετικούς κόμβους. Μια αναπαράσταση ενός πραγματικού και ενός μοντελοποιημένου δικτύου παρουσιάζονται στο διάγραμμα 3.1.



Διάγραμμα 3.1: Αναπαράσταση πραγματικού και μοντελοποιημένου δικτύου

Σε κάθε κόμβο υπηρεσίας/δρομολόγιο $i \in V$, η ολοκλήρωση της διαδρομής ενέχει ένα χρονικό κόστος $\tilde{t}_i, \forall i \in V$ – χρόνος δρομολογίου, εφεξής. Η μετάβαση από τη θέση τέλους της διαδρομής σε κόμβο $i \in N$ προς την θέση αρχής της διαδρομής σε κόμβο $j \in N$ ενέχει χρονικό κόστος t_{ij} . Θεωρείται πως δεν γίνονται μετακινήσεις μεταξύ κόμβων αμαξοστασίων και κόμβων φόρτισης. Ακόμη σε κάθε κόμβο $i \in N^k$ αντιστοιχεί μια συνεχής χρονική μεταβλητή T_i^k . Στους κόμβους υπηρεσίας αυτή αντιστοιχεί στον χρόνο έναρξης του αντίστοιχου δρομολογίου, στους κόμβους φόρτισης στον χρόνο έναρξης της φόρτισης, στους κόμβους προέλευσης τον χρόνο αναχώρησης από το αντίστοιχο αμαξοστάσιο και στους κόμβους προορισμού τον χρόνο άφιξης στο αντίστοιχο αμαξοστάσιο.

Κάθε όχημα $k \in K$ ξεκινάει τις διαδρομές της ημέρας πλήρως φορτισμένο με επίπεδο φόρτισης φ_{max}^k . Επίσης, σε κάθε όχημα $k \in K$ αντιστοιχεί μία συνεχής μεταβλητή e_i^k η οποία υποδηλώνει το επίπεδο φόρτισης του οχήματος, κατά την άφιξη του στον κόμβο $i \in V^k \cup F \cup \{o_k\}$. Θεωρώντας πως όλοι οι σταθμοί φόρτισης $z \in Z$ έχουν τον ίδιο ρυθμό φόρτισης r και το όχημα k καταφθάνει στο κόμβο φόρτισης $i \in F$ την χρονική στιγμή T_i^k , με επίπεδο φόρτισης e_i^k , το όχημα απαιτεί χρονικό διάστημα

$$\tau_i^k = (\varphi_{max}^k - e_i^k)/r$$

για να επαναφορτίσει πλήρως. Δηλαδή, το όχημα k θα επιτραπεί να αναχωρήσει από τον κόμβο μετά από χρόνο $T_i^k + \tau_i^k$. Η παραπάνω θεώρηση στηρίζεται στην παραδοχή πως ο ρυθμός φόρτισης παραμένει σταθερός, μέχρι την ολοκλήρωση της φόρτισης.

Ακόμη, σε κάθε όχημα $k \in K$ αντιστοιχεί μια συνεχής μεταβλητή \bar{e}_i^k η οποία αναφέρεται στο επίπεδο φόρτισης του οχήματος καθώς αναχωρεί από τον κόμβο $i \in V^k \cup F \cup \{o_k\}$. Όταν το όχημα αναχωρεί από το αμαξοστάσιο στην αρχή της ημέρας, δηλαδή τον κόμβο προέλευσής του o_k , ισχύει πως $\bar{e}_{o_k}^k = \varphi_{max}^k$. Στους υπόλοιπους κόμβους $i \in V^k \cup F$, ισχύει πως:

$$\bar{e}_i^k = e_i^k - g_i^k$$

όπου g_i^k είναι μια συνεχής μεταβλητή που δηλώνει την μεταβολή του επιπέδου φόρτισης κατά τη «διέλευση» του οχήματος από τον κόμβο $i \in V^k \cup F$.

Στους κόμβους υπηρεσίας $i \in V^k$, το όχημα k καθώς πραγματοποιεί το αντίστοιχο δρομολόγιο μεταβάλει το επίπεδο φόρτισης σε βαθμό $g_i^k = \eta_i \geq 0$. $\eta_i, \forall i \in V$ είναι μια προκαθορισμένη παράμετρος, που στην παρούσα εργασία εξαρτάται από το μήκος του δρομολογίου. Στους κόμβους φόρτισης $i \in F$ το όχημα επαναφορτίζει στο μέγιστο επίπεδο φόρτισης, οπότε ισχύει: $g_i^k = e_i^k - \varphi_{max}^k \leq 0$.

Ένα όχημα $k \in K$ επιτρέπεται να εκτελέσει διαδρομή στον σύνδεσμο $(i, j) \in A^k$, αν και μόνο αν το επίπεδο φόρτισης του οχήματος είναι επαρκές κατά την άφιξη στον κόμβο j , δηλαδή ισχύει: $e_j^k \geq \varphi_{min}^k$.

Στον ίδιο σύνδεσμο (i, j) αντιστοιχεί η μεταβλητή θ_{ij} , η οποία δηλώνει την μεταβολή του επιπέδου φόρτισης, ενός οχήματος k κατά την μετάβασή του από την θέση τέλους διαδρομής/γεγονότος φόρτισης στον κόμβο i στην θέση αρχής διαδρομής/γεγονότος φόρτισης στον κόμβο j .

Το λειτουργικό κόστος είναι το άθροισμα των εξής 2 συνιστωσών:

- Το επιχειρησιακό κόστος, για ένα όχημα $k \in K$ της διαδρομής/γεγονότος φόρτισης στον κόμβο $j \in N$, μετά τη διαδρομή/γεγονότος φόρτισης στον κόμβο $i \in N - \{j\}$, τη μετάβαση του οχήματος k μέσω του συνδέσμου (i, j) από τον κόμβο i στον κόμβο j , χωρίς να υπάρχει αναμονή στον κόμβο j ,

συμβολίζεται από την παράμετρο b_{ij}^k .

- Το μοναδιαίο επιχειρησιακό κόστος αναμονής των οχημάτων συμβολίζεται από την παράμετρο λ . Αυτή, με τη σειρά της, πολλαπλασιάζεται με την διαφορά της χρονικής στιγμής έναρξης μιας διαδρομής/γεγονότος φόρτισης, στον κόμβο $j \in N$, από ένα όχημα $k \in K$, με τον απαιτούμενο χρόνο πραγματοποίησης ενός δρομολογίου/φόρτισης στον προηγούμενο κόμβο $i \in N - \{j\}$ και μετάβασης στον κόμβο j , μέσω του συνδέσμου (i, j) : $\lambda(T_j^k - T_i^k - \tau_i^k - t_{ij})$. Το γινόμενο που σχηματίζεται είναι το επιχειρησιακό κόστος αναμονής του οχήματος k , στον κόμβο j , έως ότου ξεκινήσει την διαδρομή/γεγονός φόρτισης στον κόμβο j .

Παρακάτω εισάγονται μια σειρά έγκυρων ανισοτήτων (valid inequalities). Στην αρχική εργασία – ως αρχική εργασία νοείται η εργασία Gkiotsalitis et al. (2023) - αναφέρεται πως η εισαγωγή αυτών των περιορισμών μπορεί να επιφέρει έως και 73% βελτίωση στους χρόνους υπολογισμού. Επομένως, θεωρήθηκε συνετό να συμπεριληφθούν και σε αυτή την εργασία. Αυτοί οι περιορισμοί δεν είναι απαραίτητοι για την επίλυση του προβλήματος, όμως περιορίζουν τις εφικτές λύσεις, χωρίς να θέτουν ουσιαστικούς περιορισμούς στις δυνατότητες δρομολόγησης, με αποτέλεσμα να επιταχύνεται η σύγκλιση στην βέλτιστη λύση, χωρίς να υπάρχουν δυσμενείς επιπτώσεις στον προγραμματισμό της δρομολόγησης.

Αρχικά, πραγματοποιείται μία περικοπή των συνδέσμων. Αυτό επιτυγχάνεται αξιοποιώντας τους χρόνους μετάβασης μεταξύ κόμβων και των ελάχιστων/μέγιστων χρονικών ορίων έναρξης διαδρομών και γεγονότων φόρτισης στους κόμβους. Για κάθε όχημα $k \in K$, l_i είναι το κατώτατο χρονικό όριο στο οποίο μπορεί να εκκινήσει μία διαδρομή ή ένα γεγονός φόρτισης στον κόμβο $i \in N^k$ και u_j το αντίστοιχο ανώτατο χρονικό όριο.

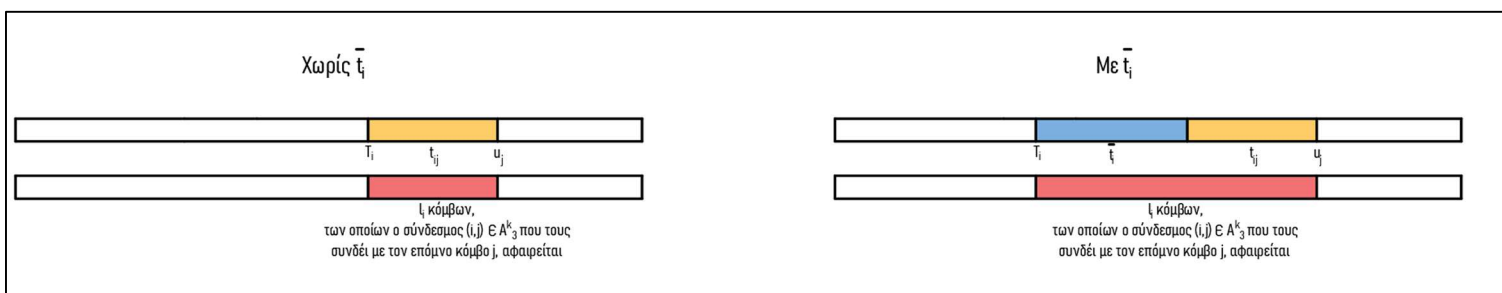
Τότε, το σύνολο A_3^k μπορεί να περιοριστεί στο σύνολο:

$$A_3^k = (i, j), \forall i \in V^k, \forall j \in V^k - \{i\}, \text{ έτσι ώστε } l_i + t_{ij} \leq u_j$$

αφαιρώντας τους συνδέσμους (i, j) για τους οποίους το άθροισμα του κατώτατου χρονικού ορίου έναρξης διαδρομής/γεγονότος φόρτισης στον κόμβο i , (l_i) , συν τον χρόνο μετάβασης στον κόμβο j , (t_{ij}) , είναι μεγαλύτερο από το ανώτατο χρονικό όριο έναρξης διαδρομής/γεγονότος φόρτισης στον κόμβο j , (u_j) .

Σε αυτό το σημείο μπορεί να προκύψει η εξής εύλογη απορία: Γιατί δεν συμπεριλαμβάνεται ο ενδεχόμενος χρόνος πραγματοποίησης δρομολογίου \bar{t}_i^s στο παραπάνω άθροισμα $(l_i + t_{ij})$;

Η απάντηση είναι πως δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν διαφορετικοί σύνδεσμοι $(i, j) \in A_3^k$ για διαφορετικά ενδεχόμενα $s \in S$. Βέβαια, αυτό σημαίνει πως αφαιρούνται λιγότεροι σύνδεσμοι από όσους θα μπορούσαν να αφαιρεθούν, όπως διακρίνεται και στο παρακάτω διάγραμμα.



Διάγραμμα 3.2: Σύνδεσμοι που αφαιρούνται, ανάλογα την συνθήκη αφαίρεσής τους

Ομοίως, περιορίζεται το σύνολο:

$$A_4^k = (i, j), \forall i \in V^k, \forall j \in F, \text{ έτσι ώστε } l_i + t_{ij} \leq u_j$$

Τα γεγονότα φόρτισης, σε κάθε κόμβο $i \in F$ δεν μπορούν να έχουν διάρκεια των 0 δευτερολέπτων, οπότε περιορίζεται το σύνολο:

$$A_5^k = (i, j), \forall i \in F, \forall j \in V^k, \text{ έτσι ώστε } l_i + t_{ij} \leq u_j$$

Καθώς, η διαδρομή στον κόμβο προέλευσης o_k διαρκεί 0 δευτερόλεπτα, περιορίζεται το σύνολο:

$$A_1^k = (o_k, j), \forall j \in N^k - \{o_k\}, \text{ έτσι ώστε } l_{o_k} + t_{o_k j} \leq u_j$$

Το σύνολο:

$$A_2^k = (j, d_k), \forall j \in N^k - \{o_k, d_k\} \text{ δεν μεταβάλλεται.}$$

Οι έγκυρες ανισότητες οι οποίες αφορούν τους περιορισμούς του προβλήματος, αναφέρονται στο κεφάλαιο του μαθηματικού μοντέλου 3.2.

3.1.2 Το πρόβλημα δρομολόγησης ηλεκτρικών λεωφορείων, πολλαπλών αμαξοστασιών, με χρονικά παράθυρα, θεωρώντας στοχαστικά δεδομένα χρόνων δρομολογίων

Το παραπάνω πρόβλημα θεωρεί πως σε κόμβο υπηρεσίας $i \in V$ ο χρόνος ολοκλήρωσης του δρομολογίου \tilde{t}_i δεν μεταβάλλεται, αλλά παραμένει πάντα ίδιος. Όμως, όπως αναφέρεται και στο σχετικό κεφάλαιο της βιβλιογραφικής ανασκόπησης, οι χρόνοι δρομολογίων παρουσιάζουν μια μεταβλητότητα.

Έστω πως S είναι το σύνολο των ενδεχομένων των χρόνων δρομολογίων, όπου κάθε ενδεχόμενο $s \in S$ έχει την ίδια πιθανότητα να συμβεί. Θεωρείται, πως οι s ενδεχόμενοι χρόνων δρομολογίων \tilde{t}_i^s σε έναν κόμβο υπηρεσίας $i \in V$, ακολουθούν λογαριθμο-κανονική κατανομή, οπότε οι φυσικοί λογάριθμοι (εφεξής, απλά λογάριθμοι, αντί για φυσικοί λογάριθμοι) των χρόνων δρομολογίων ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_i και τυπική απόκλιση ξ_i . Να σημειωθεί σε αυτό το σημείο, πως πέρα από την παράμετρο \tilde{t}_i^s , όλες οι υπόλοιπες παράμετροι και τα όλες οι μεταβλητές απόφασης δεν μεταβάλλονται και έχουν ίδιες τιμές, σε κάθε ενδεχόμενο s .

Η εισαγωγή της μεταβλητότητας των χρόνων δρομολογίων έχει ως στόχο την δημιουργία ενός προγράμματος δρομολόγησης το οποίο θα έχει την δυνατότητα να ανταποκριθεί σε ακραίες συνθήκες δρομολόγησης (μεγάλες καθυστερήσεις), χωρίς να παραβιάζονται οι περιορισμοί του προβλήματος (διατήρησης της προσφερόμενης υπηρεσίας, σε αποδεκτά επίπεδα εξυπηρέτησης).

3.2 Συμβολισμοί μοντέλου

Πίνακας 3.1. Συμβολισμοί

Σύνολα	
K	Σύνολο διαθέσιμων οχημάτων
Z	Σύνολο σταθμών φόρτισης
O, D	Σύνολο αμαξοστασίων προέλευσης και προορισμού
V^k	Υποσύνολο των κόμβων υπηρεσίας, που μπορούν να εκτελεσθούν από το όχημα k
F	Σύνολο όλων των πιθανών γεγονότων φόρτισης
F^z	Υποσύνολο των πιθανών γεγονότων φόρτισης, στον φορτιστή $z \in Z$ ταξινομημένα χρονικά από το πρώτο στο τελευταίο
N	Σύνολο όλων των πιθανών κόμβων διαδρομών, $N = \{V \cup F \cup O \cup D\}$
N^k	Υποσύνολο κόμβων, συνυφασμένο με το όχημα k , $V^k \cup F \cup \{o_k, d_k\}$
A^k	Σύνολο εφικτών συνδέσμων για το όχημα $k \in K$
G^k	$G^k = (N^k, A^k)$ είναι το δίκτυο συνυφασμένο με το όχημα k
S	Σύνολο των ενδεχόμενων χρόνων πραγματοποίησης μια εργασίας $\tilde{t}_i, \forall i \in V$

Παράμετροι	
o_k, d_k	Ο κόμβος προέλευσης και ο κόμβος προορισμού, που σχετίζονται με το αμαξοστάσιο στο οποίο ανήκει το όχημα k
$[l_i, u_i]$	Χρονικό παράθυρο συνυφασμένο με κάθε κόμβο $i \in N$
t_{ij}	Χρόνος που παρήλθε κατά την διαδρομή στον σύνδεσμο (i, j) , ο οποίος είναι ίσος με τον χρόνο διαδρομής μεταξύ της θέσης τέλους της διαδρομής σε κόμβο $i \in N$ και της θέσης αρχής της διαδρομής σε κόμβο $j \in N$
\tilde{t}_i^s	Ενδεχόμενο $s \in S$ απαιτούμενου χρόνου δρομολογίου $i \in V$
μ_i	Μέση τιμή της κανονικής κατανομής των λογαρίθμων των χρόνων δρομολογίων $i \in V$
ξ_i	Τυπική απόκλιση της κανονικής κατανομής των λογαρίθμων των χρόνων δρομολογίων

	$i \in V$
λ	Μοναδιαίο κόστος αναμονής ενός οχήματος
b_{ij}^k	Η σταθερή συνιστώσα του κόστους, κατά την πραγματοποίηση της εργασίας j μετά την εργασία i , χωρίς να λαμβάνονται υπόψιν τυχόν καθυστερήσεις (η εργασία j εκκινεί αμέσως μετά την εργασία i , χωρίς χρονικές καθυστερήσεις).
φ_{max}^k	Το επίπεδο φόρτισης (SOC) του οχήματος k , όταν είναι πλήρως φορτισμένο
φ_{min}^k	Το ελάχιστο επιτρεπόμενο SOC για το όχημα k
r	Ρυθμός φόρτισης σταθμών φόρτισης
η_i	Κατανάλωση ενέργειας διαδρομής υπηρεσίας $i \in V$
θ_{ij}	Κατανάλωση ενέργειας, κατά την διαδρομή μεταξύ της θέσης τερματισμού της διαδρομής $i \in N$ και της θέσης αρχής της διαδρομής $j \in N$
M	Πολύ μεγάλος θετικός αριθμός
q_j	Διάνυσμα $q : V \rightarrow F$ που επιστρέφει την πλησιέστερη θέση κόμβου φόρτισης $q_j \in F$ στη θέση τερματισμού του δρομολογίου $j \in V$
ω_i	Διάνυσμα που επιστρέφει το γεγονός φόρτισης που έπεται του γεγονότος φόρτισης i , το οποίο πραγματοποιείται στο ίδιο σταθμό φόρτισης

Μεταβλητές

e_i^k	SOC του οχήματος k , κατά την άφιξή του στον κόμβο $i \in V^k \cup F \cup \{d_k\}$
\bar{e}_i^k	SOC του οχήματος k , όταν ολοκληρώνει την εργασία στον κόμβο $i \in V^k \cup F \cup \{o_k\}$
τ_i^k	Απαιτούμενο χρονικό διάστημα για την επαναφόρτιση του οχήματος k μέσω του γεγονότος φόρτισης $i \in F$
g_i^k	Μεταβολή SOC οχήματος k , κατά τη διάρκεια της εργασίας $i \in V^k \cup F$
x_{ij}^k	Δυαδικές μεταβλητές ροής, όπου $x_{ij}^k = 1$ αν το όχημα k χρησιμοποιεί το σύνδεσμο $(i, j) \in A_k$ και 0 σε κάθε άλλη περίπτωση
y_i^k	Δυαδικές μεταβλητές ένδειξης, όπου $y_i^k = 1$ αν το γεγονός φόρτισης $i \in F$ πραγματοποιείται με το όχημα k και 0 σε κάθε άλλη περίπτωση
σ_{ij}^k	Συνεχείς μεταβλητές που ανήκουν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για $(i, j) \in$

$A^k, k \in K$. Χρησιμεύουν στη διατήρηση της γραμμικότητας της αντικειμενικής συνάρτησης.

$\bar{\sigma}_{ij}^k$ Συνεχείς μεταβλητές που ανήκουν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για $(i, j) \in A^k, k \in K$. Χρησιμεύουν στη διατήρηση της γραμμικότητας των περιορισμών που αφορούν την κατανάλωση ενέργειας των οχημάτων.

T_i^k Η χρονική στιγμή όπου μια εργασία εκκινεί στον κόμβο $i \in N^k$. Η $T_{o_k}^k$ υποδεικνύει την ώρα αναχώρησης από το αμαξοστάσιο, η $T_{d_k}^k$ την ώρα άφιξης στο αμαξοστάσιο και η T_i^k την ώρα όπου μια εργασία εκκινεί σε οποιονδήποτε άλλον κόμβο $i \in V^k \cup F$

z_{ij}^{ks} Συνεχείς μεταβλητές, που δηλώνουν το λειτουργικό κόστος, για το ενδεχόμενο $s \in S$, της διέλευσης ενός οχήματος $k \in K$, από τον σύνδεσμο $(i, j) \in A^k | i \in V^k \cup F$

3.3 Μαθηματικό Μοντέλο

Στόχος αυτού του μοντέλου είναι η ελαχιστοποίηση του μέσου όρου των $s \in S$ ενδεχόμενων λειτουργικών κοστών z_{ij}^{ks} $k \in K, (i, j) \in A^k | i \in V^k \cup F$. Συνεπώς, η αντικειμενική συνάρτηση ορίζεται ως εξής:

$$\min \frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A_k | i \in V^k \cup F} z_{ij}^{ks}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$z_{ij}^{ks} \leq x_{ij}^k M, \forall k \in K, \forall s \in S, (i, j) \in A_k | i \in V^k \cup F \cup \{o_k\} \quad (1)$$

$$z_{ij}^{ks} \geq -x_{ij}^k M, \forall k \in K, \forall s \in S, (i, j) \in A_k | i \in V^k \cup F \cup \{o_k\} \quad (2)$$

$$z_{ij}^{ks} \leq b_{ij}^k + \lambda(T_j^k - T_i^k - \tilde{t}_i^s - t_{ij}) + M(1 - x_{i,j}^k) \quad (3)$$

$$\forall k \in K, \forall s \in S, (i, j) \in A_k | i \in V^k$$

$$z_{ij}^{ks} \leq b_{ij}^k + \lambda(T_j^k - T_i^k - \tau_i^k - t_{ij}) + M(1 - x_{i,j}^k) \quad (4)$$

$$\forall k \in K, \forall s \in S, (i, j) \in A_k | i \in F$$

$$z_{ij}^{ks} \geq b_{ij}^k + \lambda(T_j^k - T_i^k - \tilde{t}_i^s - t_{ij}) - M(1 - x_{i,j}^k) \quad (5)$$

$$\forall k \in K, \forall s \in S, (i, j) \in A_k | i \in V^k$$

$$z_{ij}^{ks} \geq b_{ij}^k + \lambda(T_j^k - T_i^k - \tau_i^k - t_{ij}) - M(1 - x_{i,j}^k) \quad (6)$$

$$\forall k \in K, \forall s \in S, (i, j) \in A_k | i \in F$$

Οι παραπάνω περιορισμοί είναι αντίστοιχοι με τους περιορισμούς (41) έως και (46) της αρχικής εργασίας – ως αρχική νοείται η εργασία Gkiotsalitis et al. (2023). Ουσιαστικά, αυτοί οι περιορισμοί ορίζουν τις τιμές τις οποίες μπορεί να λάβει το λειτουργικό κόστος και αποτελούν την γραμμικοποίηση της παρακάτω διατύπωσής του, για ενδεχόμενο $s \in S$, της διέλευσης ενός οχήματος $k \in K$, από τον σύνδεσμο $(i, j) \in A^k | i \in V^k \cup F$:

$$z_{ij}^{ks} = \left(b_{ij}^k + \lambda(T_j^k - T_i^k - \tilde{t}_i^s - t_{ij}) \right) x_{ij}^k$$

Ως M συμβολίζεται ένας πολύ μεγάλος ακέραιος αριθμός. Οπότε σύμφωνα με τους παραπάνω περιορισμούς, εάν ο σύνδεσμος (i, j) χρησιμοποιείται από κάποιο όχημα k , η μεταβλητή x_{ij}^k λαμβάνει την τιμή 1, άρα η μεταβλητή z_{ij}^{ks} υποχρεώνεται να λάβει την τιμή $z_{ij}^{ks} = b_{ij}^k + \lambda(T_j^k - T_i^k - \tau_i^k - t_{ij})$, καθώς οι κρίσιμοι περιορισμοί είναι οι (3), (4), (5), (6). Εάν ο σύνδεσμος (i, j) δεν χρησιμοποιείται από κάποιο όχημα k , η μεταβλητή x_{ij}^k λαμβάνει την τιμή 0, άρα η μεταβλητή z_{ij}^{ks} υποχρεώνεται να λάβει την τιμή 0, καθώς οι κρίσιμοι περιορισμοί είναι οι (1), (2).

$$\sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A_k} x_{ij}^k = 1, \forall j \in V \quad (7)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A_k} x_{ij}^k \leq 1, \forall j \in F \quad (8)$$

$$\sum_{j:(o_k,j) \in A^k} x_{o_k j}^k = \sum_{i:(i,d_k) \in A^k} x_{i,d_k}^k = 1, \forall k \in K \quad (9)$$

$$\sum_{i:(i,j) \in A^k} x_{ij}^k - \sum_{i:(j,i) \in A^k} x_{ji}^k = 0, \forall k \in K, \forall j \in V^k \cup F \quad (10)$$

Οι παραπάνω περιορισμοί είναι αντίστοιχοι με τους περιορισμούς (8) έως και (11) της αρχικής εργασίας.

Ο περιορισμός (7) εξασφαλίζει πως κάθε κόμβος υπηρεσίας $j \in V$ θα αντιστοιχηθεί με ένα ακριβώς όχημα $k \in K$.

Ο περιορισμός (8) εξασφαλίζει πως κάθε γεγονός φόρτισης $j \in F$ θα αντιστοιχηθεί με ένα το πολύ όχημα $k \in K$.

Ο περιορισμός (9) εξασφαλίζει πως κάθε όχημα $k \in K$ θα εκκινήσει και θα τερματίσει τις διαδρομές της ημέρας του από και προς το αμαξοστάσιο του, αντίστοιχα.

Ο περιορισμός (10) εξασφαλίζει πως εάν ο σύνδεσμος (i, j) , ο οποίος καταλήγει σε κόμβο υπηρεσίας ή φόρτισης, χρησιμοποιείται από κάποιο όχημα, τότε και ο αντίστροφος σύνδεσμος (j, i) θα δηλωθεί ως χρησιμοποιούμενος από το ίδιο όχημα. Ομοίως, αν οι ίδιοι τύποι συνδέσμων (i, j) , δεν χρησιμοποιούνται από κάποιο όχημα, τότε ο αντίστροφος σύνδεσμος (j, i) θα δηλωθεί ως μη-χρησιμοποιούμενος.

$$\tau_i^k = (\varphi_{max}^k - e_i^k)/r, \forall i \in F, \forall k \in K \quad (11)$$

$$l_i \leq T_i^k \leq u_i, \forall k \in K, \forall i \in N^k \quad (12)$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\}, \forall k \in K, \forall (i,j) \in A^k \quad (13)$$

Οι παραπάνω περιορισμοί είναι αντίστοιχοι με τους περιορισμούς (15) έως και (17) της αρχικής εργασίας.

Ο περιορισμός (11) ορίζει την διάρκεια φόρτισης ενός οχήματος $k \in K$, κάθε γεγονότος φόρτισης $i \in F$.

Ο περιορισμός (12) εξασφαλίζει πως ο χρόνος έναρξης μια διαδρομής ή γεγονότος φόρτισης, σε έναν κόμβο $i \in N^k$, για κάθε όχημα $k \in K$, θα είναι εντός του χρονικού παραθύρου που αντιστοιχεί σε εκείνον τον κόμβο.

Ο περιορισμός (13) ορίζει πως οι μεταβλητές x_{ij}^k λαμβάνουν δυαδικές τιμές.

$$\bar{e}_{o_k}^k = \varphi_{max}^k, \forall k \in K \quad (14)$$

$$\bar{e}_j^k = e_i^k - g_j^k, \forall j \in V^k \cup F, \forall k \in K \quad (15)$$

Οι παραπάνω περιορισμοί είναι αντίστοιχοι με τους περιορισμούς (18) και (19) της αρχικής εργασίας.

Ο περιορισμός (14) επιβάλλει πως κάθε όχημα $k \in K$, αναχωρεί από το αμαξοστάσιο του πλήρως φορτισμένο.

Ο περιορισμός (15) ορίζει τη σχέση μεταξύ του επιπέδου φόρτισης ενός οχήματος $k \in K$ κατά την άφιξη του σε έναν κόμβο $i \in V^k \cup F$ και του επιπέδου φόρτισης του, κατά την αναχώρηση του από τον ίδιο κόμβο.

$$e_j^k \leq (\bar{e}_i^k - \theta_{ij}) + (1 - x_{ij}^k)M, \forall (i,j) \in A^k, \forall k \in K \quad (16)$$

$$g_i^k = \eta_i, \forall i \in V^k, \forall k \in K \quad (17)$$

$$g_i^k = e_i^k - \varphi_{max}^k, \forall i \in F, \forall k \in K \quad (18)$$

$$\varphi_{min}^k \leq e_j^k, \forall k \in K, \forall j \in V^k \cup F \cup \{d_k\} \quad (19)$$

$$y_i^k = \sum_{j:(i,j) \in A_k} x_{ij}^k, \forall i \in F, \forall k \in K \quad (20)$$

Οι παραπάνω περιορισμοί αντιστοιχούν στους περιορισμούς (21) έως και (25) της αρχικής εργασίας.

Ο περιορισμός (16) ορίζει την σχέση μεταξύ του επιπέδου φόρτισης ενός οχήματος $k \in K$ κατά την αναχώρησή του από έναν κόμβο i και του επιπέδου φόρτισης του, κατά την άφιξή του στον επόμενο κόμβο, μετά από την διέλευσή του από τον σύνδεσμο $(i, j) \in A^k$. Εάν ο κόμβος χρησιμοποιείται από όχημα k , τότε η μεταβλητή x_{ij}^k λαμβάνει την τιμή 1, και σε συνδυασμό με τους περιορισμούς (26), (27), (28), η μεταβλητή e_j^k υποχρεώνεται να λάβει την τιμή $e_j^k = (\bar{\sigma}_i^k - \theta_{ij})$. Εάν ο κόμβος δεν χρησιμοποιείται από όχημα k , τότε η μεταβλητή x_{ij}^k λαμβάνει την τιμή 0, και συνδυασμό με τους περιορισμούς (26), (27), (28), η μεταβλητή e_j^k επιτρέπεται να λάβει τιμές προσεγγιστικά από $-M$ έως M .

Ο περιορισμός (17) ορίζει την μεταβολή του επιπέδου φόρτισης του οχήματος $k \in K$ κατά την πραγματοποίηση δρομολογίου στον κόμβο $i \in V^k$.

Ο περιορισμός (18) ορίζει την μεταβολή του επιπέδου φόρτισης του οχήματος $k \in K$ κατά την φόρτισή του στον κόμβο $i \in F$.

Ο περιορισμός (19) επιβάλλει την τήρηση του κατώτατου ορίου επιπέδου φόρτισης φ_{min}^k , κατά την άφιξη ενός οχήματος $k \in K$ σε κόμβο $j \in V^k \cup F \cup \{d_k\}$.

Ο περιορισμός (20), σε συνδυασμό με τους περιορισμούς (29), (30), (31), επιβάλλει πως ένας σταθμός φόρτισης $z \in Z$, που βρίσκεται σε χρήση κατά τη διάρκεια του γεγονότος φόρτισης $i \in F$, τότε το επόμενο γεγονός φόρτισης, στον ίδιο σταθμό φόρτισης – που υποδεικνύεται από το την παράμετρο ω_i – πρέπει να ξεκινήσει, αφού τελειώσει το τρέχον γεγονός φόρτισης. Δηλαδή, επιβάλλεται πως ένας σταθμός φόρτισης δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί από άνω του ενός οχήματος ταυτόχρονα. F_0 είναι το υποσύνολο όλων των πιθανών γεγονότων φόρτισης F , αφού αφαιρεθούν τα τελευταία πιθανά γεγονότα φόρτισης, σε κάθε σταθμό φόρτισης. Για καλύτερη κατανόηση παρουσιάζονται 2 σενάρια, για έναν φορτιστή $z \in Z$:

Το γεγονός φόρτισης $i \in F_0$ δεν αντιστοιχεί σε κανένα όχημα:

- Αρχικά, $x_{ij}^k = 0, \forall k \in K$, οπότε σύμφωνα με τον περιορισμό (20), $y_i^k = 0, \forall k \in K$
- Σύμφωνα με τους περιορισμούς (30) & (31), οι συνεχείς μεταβλητές $\bar{\sigma}_i^{k_0}$ μπορούν να λάβουν τιμές προσεγγιστικά μεταξύ $-M$ και M
- Σύμφωνα με τον περιορισμό (29) η διαφορά $T_{\omega_i}^k - (T_i^{k_0} + \tau_i^{k_0})$ μπορεί να λάβει τιμές μεγαλύτερες ή ίσες με $\bar{\sigma}_i^{k_0} - M \approx [-2M, 0]$
- Οπότε η παραπάνω διαφορά μπορεί να πάρει τιμές οπουδήποτε στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$, άρα το επόμενο γεγονός φόρτισης ω_i μπορεί να ξεκινήσει οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Το γεγονός φόρτισης $i \in F_0$ αντιστοιχεί σε ένα όχημα $k_0 \in K$:

- Αρχικά, $x_{ij}^{k_0} = 1$, οπότε σύμφωνα με τον περιορισμό (20), $y_i^{k_0} = 1$
- Σύμφωνα με τους περιορισμούς (30) & (31), η μεταβλητή $\bar{\sigma}_i^{k_0}$ επιβάλλεται να λάβει τιμή ίση με το 0
- Συνεπώς, ο περιορισμός (29) μετασχηματίζεται σε $T_{\omega_i}^k \geq T_i^{k_0} + \tau_i^{k_0}$. Αυτό σημαίνει, πως το επόμενο

όχημα k που «επιθυμεί» να φορτίσει στον σταθμό φόρτισης z , με το επόμενο διαθέσιμο γεγονός φόρτισης ω_i , είναι υποχρεωμένο να ξεκινήσει σε χρονική στιγμή $T_{\omega_i}^k$, η οποία θα είναι αργότερα από το τέλος του τρέχοντος γεγονότος φόρτισης i , το οποίο χρησιμοποιείται από το όχημα k .

Τέλος, να σημειωθεί πως ένα γεγονός φόρτισης δεν μπορεί να αντιστοιχηθεί σε παραπάνω από ένα όχημα, καθώς εξ' ορισμού κανένας κόμβος δεν μπορεί να αντιστοιχηθεί σε παραπάνω από ένα όχημα. (Βλέπετε περιορισμό (7)).

$$T_i^k + \tilde{\tau}_i^s + t_{ij} - T_j^k + \sigma_{ij}^k \leq 0, \forall k \in K, \forall s \in S, \forall (i, j) \in A^k \mid i \in V^k \quad (21)$$

$$T_{o_k}^k + t_{o_k j} - T_j^k + \sigma_{o_k j}^k \leq 0, \forall k \in K, \forall (o_k, j) \in A^k \quad (22)$$

$$T_i^k + \tau_i^k + t_{ij} - T_j^k + \sigma_{ij}^k \leq 0, \forall k \in K, \forall (i, j) \in A^k \mid i \in F \quad (23)$$

$$\sigma_{ij}^k \leq M(1 - x_{ij}^k), \forall k \in K, \forall (i, j) \in A^k \quad (24)$$

$$\sigma_{ij}^k \geq -M(1 - x_{ij}^k), \forall k \in K, \forall (i, j) \in A^k \quad (25)$$

Οι παραπάνω περιορισμοί είναι αντίστοιχοι με τους περιορισμούς (30) έως και (34) της αρχικής εργασίας.

Ο περιορισμός (21) διασφαλίζει πως εάν ένα όχημα $k \in K$ εκτελεί δρομολόγιο στον κόμβο $i \in V^k$, τότε η χρονική στιγμή έναρξης της διαδρομής ή του γεγονότος φόρτισης, στον επόμενο κόμβο j , θα είναι μετά τη χρονική στιγμή, στην οποία το όχημα θα έχει ολοκληρώσει το δρομολόγιο του στον κόμβο i και θα έχει ολοκληρώσει την μετάβαση του στον κόμβο j , μέσω του συνδέσμου $(i, j) \in A^k$, για κάθε ενδεχόμενο $s \in S$.

Ο περιορισμός (22) διασφαλίζει πως εάν ένα όχημα $k \in K$ αναχωρεί από το αμαξοστάσιο του o_k , τότε η χρονική στιγμή έναρξης της διαδρομής ή του γεγονότος φόρτισης, στον επόμενο κόμβο j , θα είναι μετά τη χρονική στιγμή, στην οποία το όχημα θα έχει αναχωρήσει από το αμαξοστάσιο του o_k και θα έχει ολοκληρώσει την μετάβαση του στον κόμβο j , μέσω του συνδέσμου $(o_k, j) \in A^k$.

Ο περιορισμός (23) διασφαλίζει πως εάν ένα όχημα $k \in K$ φορτίζει στον κόμβο $i \in F$, τότε η χρονική στιγμή έναρξης της διαδρομής ή του γεγονότος φόρτισης, στον επόμενο κόμβο j , θα είναι μετά τη χρονική στιγμή, στην οποία το όχημα θα έχει ολοκληρώσει το γεγονός φόρτισης στον κόμβο i και θα έχει ολοκληρώσει την μετάβαση του στον κόμβο j , μέσω του συνδέσμου $(i, j) \in A^k$.

Οι περιορισμοί (24) και (25) υποχρεώνουν την μεταβλητή σ_{ij}^k να λάβει τιμή 0, εάν ένα όχημα $k \in K$ χρησιμοποιεί τον σύνδεσμο $(i, j) \in A^k$. Ειδάλλως, η μεταβλητή σ_{ij}^k μπορεί να λάβει τιμές μεταξύ $-M$ και M .

$$e_j^k \geq (\bar{e}_i^k - \theta_{ij}) + \bar{\sigma}_{ij}^k, \forall (i, j) \in A^k, \forall k \in K \quad (26)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^k \leq M(1 - x_{ij}^k), \forall (i, j) \in A^k, \forall k \in K \quad (27)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^k \geq -M(1 - x_{ij}^k), \forall (i, j) \in A^k, \forall k \in K \quad (28)$$

$$T_i^{k_0} + \tau_i^{k_0} + \tilde{\sigma}_i^{k_0} \leq T_{\omega_i}^k + M(1 - \sum_{\rho: (\omega_i, \rho) \in A^k} x_{\omega_i \rho}^k), \forall i \in F_0, \forall k \in K, \forall k_0 \in K \quad (29)$$

$$\tilde{\sigma}_i^{k_0} \leq M(1 - y_i^{k_0}), \forall i \in F_0, \forall k_0 \in K \quad (30)$$

$$\tilde{\sigma}_i^{k_0} \geq -M(1 - y_i^{k_0}), \forall i \in F_0, \forall k_0 \in K \quad (31)$$

Οι παραπάνω περιορισμοί αντιστοιχούν στους περιορισμούς (35) έως και (40) της αρχικής εργασίας.

Για τους περιορισμούς (26), (27), (28), βλέπετε τον περιορισμό (16).

Για τους περιορισμούς (29), (30), (31), βλέπετε τον περιορισμό (20).

Παρακάτω, εισάγονται οι έγκυρες ανισότητες (valid inequalities) που αφορούν τους περιορισμούς.

$$e_j^k \leq \varphi_{max}^k, \forall k \in K, \forall j \in V^k \cup F \cup \{d_k\} \quad (32)$$

$$\bar{e}_j^k \geq \varphi_{min}^k + \theta_{j,q}, \forall j \in K, \forall j \in V^k \quad (33)$$

Οι παραπάνω περιορισμοί αντιστοιχούν στους περιορισμούς (50) και (51) της αρχικής εργασίας και αφορούν το επίπεδο φόρτισης των οχημάτων.

Ο περιορισμός (32) επιβάλλει το επίπεδο φόρτισης του οχήματος $k \in K$, κατά την άφιξή του στον κόμβο $j \in V^k \cup F \cup \{d_k\}$, να μην υπερβαίνει το μέγιστο επιτρεπόμενο επίπεδο φόρτισης φ_{max}^k .

Ο περιορισμός (33) διασφαλίζει πως το επίπεδο φόρτισης του οχήματος $k \in K$, κατά την αναχώρησή του από τον κόμβο $j \in V^k$ είναι επαρκές, έτσι ώστε να έχει την δυνατότητα να μεταβεί στον πλησιέστερο σταθμό φόρτισης q_j . Όπου q είναι ένα διάνυσμα το οποίο περιέχει τον πλησιέστερο κόμβο φόρτισης $q_j \in F$, στην θέση τερματισμού διαδρομής, κάθε κόμβου υπηρεσίας $j \in V$.

$$\sum_{k \in K} y_i^k l_i \leq T_{\omega_i}^k + M(1 - \sum_{\rho: (\omega_i, \rho) \in A^k} x_{\omega_i \rho}^k), \forall i \in F_0, \forall k \in K \quad (34)$$

Ο παραπάνω περιορισμός αντιστοιχεί στον περιορισμό (52) της αρχικής εργασίας, και αφορά την μείωση των γεγονότων φόρτισης.

Καθώς ο χρόνος φόρτισης, ενός οχήματος $k_0 \in K$, σε έναν κόμβο φόρτισης $i \in F_0$ έχει ως ελάχιστη τιμή τα 0 δευτερόλεπτα, ο αριστερός όρος του περιορισμού (29) $(T_i^{k_0} + \tau_i^{k_0} + \tilde{\sigma}_i^{k_0})$, όταν ένα όχημα k_0 χρησιμοποιεί αξιοποιεί το γεγονός φόρτισης i , έχει ως ελάχιστη τιμή το γινόμενο $y_i^{k_0} l_i$. Οπότε με τον περιορισμό (34), εξασφαλίζεται πως το γεγονός φόρτισης ω_i ενός οχήματος k , δεν μπορεί να εκκινήσει πριν από το κατώτατο χρονικό όριο l_i του αμέσως προηγούμενου γεγονότος φόρτισης i .

$$T_i^k + \tilde{t}_i^s + t_{ij} \leq u_j + M(1 - x_{ij}^k), \forall k \in K, \forall s \in S, \forall i \in V^k, j \in V^k \cup F \cup \{d_k\} - \{i\} \quad (35)$$

$$T_i^k + \tau_i + t_{ij} \leq u_j + M(1 - x_{ij}^k), \forall k \in K, \forall i \in F, j \in V^k \cup F \cup \{d_k\} \quad (36)$$

Οι παραπάνω περιορισμοί είναι αντίστοιχοι με τους περιορισμούς (53) και (54) της αρχικής εργασίας και αφορούν την μείωση των πιθανών χρόνων έναρξης δρομολογίων.

Ο περιορισμός (35) εξασφαλίζει πως το όχημα $k \in K$, θα έχει ολοκληρώσει το δρομολόγιο του σε έναν κόμβο υπηρεσίας $i \in V^k$ και την μετάβαση του στον επόμενο κόμβο $j \in V^k \cup F \cup \{d_k\} - \{i\}$, προτού επέλθει το ανώτατο χρονικό όριο έναρξης διαδρομής/γεγονότος φόρτισης στον κόμβο j .

Ο περιορισμός (36) εξασφαλίζει πως το όχημα $k \in K$, θα έχει ολοκληρώσει την φόρτισή του σε έναν κόμβο φόρτισης $i \in F$ και την μετάβαση του στον επόμενο κόμβο $j \in V^k \cup F \cup \{d_k\}$, προτού επέλθει το ανώτατο χρονικό όριο έναρξης διαδρομής/γεγονότος φόρτισης στον κόμβο j .

$$x_{ij}^k + x_{ij'}^{k'} \leq 1, \forall k \in K, \forall k' \in K - \{k\}, \forall (i, j) \in A_k \cap A_{k'} \quad (37)$$

$$x_{ij}^k + x_{i'j'}^k \leq 1, \forall k \in K, \forall (i, j) \in A_k, \forall (i', j') \in A_k: i' = i \wedge j' \neq j = j \quad (38)$$

$$x_{ij}^k + x_{i'j'}^k \leq 1, \forall k \in K, \forall (i, j) \in A_k, \forall (i', j') \in A_k: i' \neq i \wedge j' = j \quad (39)$$

Οι παραπάνω περιορισμοί είναι αντίστοιχοι με τους περιορισμούς (55) έως και (57) της αρχικής εργασίας και αφορούν την αφαίρεση των συνδέσμων που έρχονται σε εμπλοκή.

Έστω πως i, j, k και i', j', k' είναι 2 παρακείμενοι σύνδεσμοι του πολύγραφου G . Θεωρείται πως εκείνοι οι σύνδεσμοι βρίσκονται σε εμπλοκή εάν $k = k'$ ή $i = i'$ ή $j = j'$.

3.4 Μαθηματικό μοντέλο, με περιορισμούς πιθανότητας

Υπάρχει περίπτωση, στην προσπάθεια να ικανοποιηθούν όλοι οι περιορισμοί, για όλα τα ενδεχόμενα των χρόνων των δρομολογίων, το επιχειρησιακό κόστος της βέλτιστης λύσης να είναι αρκετά υψηλό. Αυτό μπορεί να συμβεί διότι τα ακραία ενδεχόμενα των χρόνων δρομολογίων (μεγάλες καθυστερήσεις), που απαιτούν αρκετά μεγάλο επιχειρησιακό κόστος στον προγραμματισμό τους, «παρασύρουν» το μέσο επιχειρησιακό κόστος σε υψηλές τιμές. Επομένως, εξετάζεται η μετατροπή ενός εκ των περιορισμών σε περιορισμό πιθανότητας. Ο στόχος είναι να παρατηρηθεί η μεταβολή του επιχειρησιακού κόστους συναρτήσει της πιθανότητας να ικανοποιείται ο περιορισμός πιθανότητας.

Ως περιορισμός που μετατρέπεται σε περιορισμό πιθανότητας, επιλέγεται ο περιορισμός (21):

$$T_i^k + \tilde{\tau}_i^s + t_{ij} - T_j^k + \sigma_{ij}^k \leq 0, \forall k \in K, \forall s \in S, \forall (i, j) \in A^k \mid i \in V^k$$

Επιλέγεται ο συγκεκριμένος περιορισμός, καθώς εμπεριέχει τον όρο $\tilde{\tau}_i^s$, οπότε είναι πιο εύκολο να ερμηνευθεί ικανοποίηση της συνθήκης πιθανότητας στην καινούρια του μορφή.

$$Prob(T_i^k + \tilde{\tau}_i^s + t_{ij} - T_j^k + \sigma_{ij}^k \leq 0) \leq \alpha, \forall k \in K, \forall s \in S, \forall (i, j) \in A^k \mid i \in V^k, \alpha \in (0, 1] \quad (40)$$

Όπου α είναι η παράμετρος που ρυθμίζει την πιθανότητα για την οποία θα ισχύει ο παραπάνω περιορισμός.

Βέβαια, ο περιορισμός, στην παραπάνω μορφή του, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε κάποιον αλγόριθμο

επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης. Καθώς, όμως, ο όρος $\tilde{\tau}_i^s$ δεν πολλαπλασιάζεται με κάποια μεταβλητή, συνεπάγεται πως για έναν κόμβο $i \in V^k$, με $s \in S$ ενδεχόμενα των χρόνων δρομολογίων, ο περιορισμός (40) ισχύει για τους $[\alpha|S|]$ χαμηλότερους ενδεχόμενους χρόνων δρομολογίων $\tilde{\tau}_i^s$. Αυτό ισχύει, διότι, όσο υψηλότερη είναι η τιμή $\tilde{\tau}_i^s$, τόσο υψηλότερος είναι και ο αριστερός όρος της ανισότητας, μέσα στον όρο της πιθανότητας. Συνεπώς, γίνεται λιγότερο πιθανό να ισχύει ο περιορισμός πιθανότητας.

Η τελική μορφή του περιορισμού πιθανότητας είναι η εξής:

$$T_i^k + \tilde{\tau}_i^s + t_{ij} - T_j^k + \sigma_{ij}^k \leq 0, \forall k \in K, \forall (i, j) \in A^k \mid i \in V^k, \forall s \in S_i^\alpha \quad (41)$$

Όπου S_i^α είναι υποσύνολο του S , που περιέχει τα ενδεχόμενα s τα οποία αντιστοιχούν στους $[\alpha|S|]$ χαμηλότερους ενδεχόμενους χρόνων δρομολογίων $\tilde{\tau}_i^s$, στον κόμβο $i \in V^k$.

Η τελική διατύπωση αυτής της εκδοχής του προβλήματος εμπεριέχει την αρχική αντικειμενική συνάρτηση:

$$\min \frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} \sum_{(i, j) \in A_k \mid i \in V^k \cup F} z_{ij}^{ks}$$

υπό τους περιορισμούς (1) έως και (20), (22) έως και (39) και (41).

4. Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων χρόνων διαδρομής

Στην ενότητα της μεθοδολογίας αναφέρεται πως οι μεταβλητές \tilde{t}_i^s ακολουθούν λογαριθμική κατανομή $\forall i \in V$, με παραμέτρους κατανομής μ_i και ξ_i . Το ζήτημα είναι πως κατά τη βιβλιογραφική ανασκόπηση δεν εντοπίστηκαν εμπειρικές τιμές, για εκείνες τις παραμέτρους, συναρτήσει κάποιου παράγοντα όπως το μήκος της διαδρομής. Συνεπώς, για να οριστούν αυτές οι παράμετροι, απαιτούνται δεδομένα πεδίου χρόνων διαδρομών.

Ως πηγή δεδομένων, επιλέγονται τα δεδομένα GTFS (General Transit Feed Specification) του συγκοινωνιακού φορέα της Κρακοβίας ([ZTP, 2024](#)). Συγκεκριμένα, από τις 27/3/2024 μέχρι τις 11/9/2024, γίνεται λήψη των αρχείων «GTFS_KRK_A.zip» και «Trip_Updates_A.pb». Το πρώτο αρχείο περιέχει τα gtfs-static δεδομένα των λεωφορειακών γραμμών του φορέα, ενώ το δεύτερο περιέχει τα gtfs-realtime δεδομένα, των λεωφορειακών γραμμών που αφορούν το τμήμα των «Ενημερώσεων Δρομολογίων» (Trip Updates). Ειδικά, η λήψη του αρχείου «Trip_Updates.pb» πραγματοποιείται σε προχωρημένες ώρες της ημέρας, έτσι ώστε να συμπεριλαμβάνονται στο αρχείο δεδομένα για το μεγαλύτερο δυνατό αριθμό δρομολογίων.

Οι αριθμός των ημερών συλλογής δεδομένων (169) είναι σκόπιμος. Για κάθε διαδρομή υπηρεσίας είναι επιθυμητό να υπάρχουν 100 σενάρια χρόνων διαδρομής. Αυτή η τιμή ικανοποιεί τους δύο αντικρουόμενους στόχους της σχολαστικότητας και του χρόνου υπολογισμού. Σύμφωνα με την εργασία του [Hale \(1972\)](#), το απαιτούμενο μέγεθος δείγματος n , με άνω όριο στατιστικού πληθυσμού N , μπορεί να υπολογιστεί με την σχέση:

$$n = \frac{Z^2 S^2 N}{N \ln^2(P + 1) + Z^2 S^2}$$

Όπου:

- $Z = 1,96$ για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%
- S η τυπική απόκλιση των φυσικών λογάριθμων του δείγματος. Σύμφωνα με αρχικές παρατηρήσεις δειγμάτων με τουλάχιστον 9 χρόνους διαδρομής, εντοπίστηκε μια μέση τυπική απόκλιση, γύρω στη τιμή 0,40
- P το περιθώριο σφάλματος, που λαμβάνεται ως 5%

Ως αποτέλεσμα, λαμβάνεται ελάχιστο μέγεθος δείγματος $n = 72,083 \approx 72$.

Ο συγκοινωνιακός φορέας της Κρακοβίας, λειτουργεί τις λεωφορειακές του γραμμές με 5 μοτίβα υπηρεσίας, όπως εμφανίζονται στον πίνακα 4.1. Όπως αναφέρεται παρακάτω, από το όνομα του κάθε δρομολογίου, αποσπάται το τμήμα που αφορά το μοτίβο υπηρεσίας. Παρόλα αυτά, αυτό δεν σημαίνει πως, χωρίς το τμήμα εκείνο, τα δρομολόγια μεταξύ διαφορετικών μοτίβων υπηρεσίας έχουν ονομαστική αντιστοιχία. Οπότε, για να συλλεχθεί ένα επαρκές μέγεθος δείγματος ενός δρομολογίου, δεν αρκεί να συλλεχθούν δεδομένα 72 διαδοχικών ημερών. Δεδομένου πως το μοτίβο υπηρεσίας, με τις περισσότερες ημέρες υπηρεσίας, έχει 3 ημέρες υπηρεσίας, απαιτούνται $72 * 7/3 \approx 168$ διαδοχικές ημέρες συλλογής δεδομένων, ώστε να συλλεχθεί δείγμα 72 χρόνων διαδρομής, από τα δρομολόγια με τις περισσότερες ημέρες υπηρεσίας.

Πίνακας 4.1 Μοτίβα υπηρεσίας ZTP, **ZTP (2024)**

Μοτίβο Υπηρεσίας	Ημέρες Υπηρεσίας
1	Δευτέρα, Τρίτη, Τετάρτη
2	Σάββατο
3	Κυριακή
4	Παρασκευή

Όσον αφορά στο GTFS, το πρότυπο GTFS αποτελείται από 2 μέρη, το GTFS-schedule ή GTFS-static και το GTFS-realtime. Το GTFS-schedule περιέχει πληροφορίες για τις γραμμές, τα δρομολόγια, τα χωρικά δεδομένα και τα κόμιστρα ενός συγκοινωνιακού φορέα, με τα αρχεία να έχουν διαμόρφωση ενός κοινού αρχείου κειμένου (text file). Εκείνα τα αρχεία συνήθως ενημερώνονται στην αρχή της ημέρας. Το GTFS-realtime περιέχει πληροφορίες για:

- Ενημερώσεις δρομολογίων (Trip updates), πχ χρόνους αναχωρήσεων και αφίξεων σε στάσεις
- Προειδοποιήσεις υπηρεσίας (Service alerts), πχ απρόσμενα γεγονότα που επηρεάζουν το δίκτυο ή κάποιο σημείο του.
- Θέσεις οχημάτων (Vehicle positions), δηλαδή θέσεις οχημάτων και επίπεδο κορεσμού κυκλοφορίας
- Αλλαγές δρομολογίων (Trip modifications), δηλαδή πληροφορίες για εκτροπές που επηρεάζουν ένα σύνολο δρομολογίων

Τα αρχεία GTFS-realtime έχουν διαμόρφωση «Protocol Buffer», εξασφαλίζοντας την αναγνωσιμότητά τους από όλες τις αρχιτεκτονικές υπολογιστών ([gtfs.org 2024](https://gtfs.org), [Google 2024](https://www.google.com)). Αυτά τα αρχεία, ενημερώνονται από τον εκάστοτε συγκοινωνιακό φορέα, αρκετές φορές, κατά τη διάρκεια της ημέρας.

4.1 Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων trip update

Τα αρχεία «Trip_Updates_A» μετατρέπονται σε κοινά αρχεία κειμένου με το εργαλείο «gtfs-rt-dump» [Rashke \(2022\)](#), με όνομα «TU_D_M.csv», όπου D η μέρα και M ο μήνας των δεδομένων του αρχείου. Έπειτα, τα αρχεία επεξεργάζονται με το python script, με όνομα «trip_update_concatenator.py». Ο κώδικας του προγράμματος παρατίθεται στο [απόσπασμα κώδικα 1.1](#) του παραρτήματος. Στόχος αυτού του προγράμματος είναι δημιουργία ενός πίνακα, σε αρχείο με διαμόρφωση κοινού αρχείου κειμένου και όνομα «trip_times_conc.csv», με τις εξής 4 στήλες:

- trip_id: Περιέχει το όνομα των επιμέρους δρομολογίων
- trip_duration: Περιέχει τη χρονική διάρκεια των επιμέρους δρομολογίων, σε δευτερόλεπτα (sec)
- trip_length: Περιέχει το μήκος των επιμέρους δρομολογίων, σε χιλιόμετρα (km)
- trip_day: Περιέχει την ημερομηνία των επιμέρους δρομολογίων, σε διαμόρφωση D_M

Κάθε γραμμή αυτού του πίνακα αντιστοιχεί σε ένα πραγματοποιημένο δρομολόγιο, στο χρονικό διάστημα συλλογής δεδομένων.

Προτού παρουσιαστεί η μεθοδολογία με την οποία δημιουργείται ο παραπάνω πίνακας, παρουσιάζεται η διαμόρφωση των αρχείων τα οποία χρησιμοποιούνται για την δημιουργία του πίνακα.

Αρχείο «stop_times.txt»

Το αρχείο αυτό βρίσκεται μέσα στο φάκελο «GTFS_KRK_A_D_M». Κάθε γραμμή του αρχείου αντιστοιχεί σε μία δρομολογημένη στάση. Το αρχείο αποτελείται από 10 στήλες, όμως στην παρούσα εργασία, γίνεται χρήση των εξής 3 στηλών:

- trip_id: το όνομα του δρομολογίου, στην οποία ανήκει η δρομολογημένη στάση
- stop_sequence: η σειρά τής στάσης, στην αλληλουχία των δρομολογημένων στάσεων, στο δρομολόγιο που ανήκει
- shape_dist_traveled: η απόσταση που θα έχει διανύσει ένα όχημα, στο δρομολόγιο που ανήκει η στάση, εφόσον αφιχθεί στη στάση

Αρχείο «TU_D_M.csv»

Κάθε γραμμή του αρχείου αντιστοιχεί σε μια ενημέρωση διαδρομής (trip update), η οποία συμβαίνει καθώς βρίσκεται σε κάποια στάση του. Το αρχείο αποτελείται από 22 στήλες, όμως στην παρούσα εργασία, γίνεται χρήση των εξής 3 στηλών:

- trip.tripId: το δρομολόγιο στο οποίο ανήκει η ενημέρωση διαδρομής
- stopTimeUpdate.arrival.time: η χρονική στιγμή, σε διαμόρφωση Unix timestamp*, στην οποία το όχημα αφικνείται στην στάση, που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη ενημέρωση διαδρομής
- stopTimeUpdate.departure.time: η χρονική στιγμή, σε διαμόρφωση Unix timestamp*, στην οποία το όχημα αναχωρεί από την στάση, που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη ενημέρωση διαδρομής

*Το Unix timestamp διαμορφώνεται με έναν ακέραιο αριθμό. Αυτός ο ακέραιος αριθμός αντιστοιχεί στα δευτερόλεπτα που έχουν παρέλθει από την χρονική στιγμή: 1^η Ιανουαρίου 1970, 00:00:00 UTC

4.2 Στατιστική επεξεργασία δεδομένων χρόνων διαδρομής

Η στατιστική επεξεργασία των δεδομένων χρόνων διαδρομής πραγματοποιείται με τη βοήθεια του προγράμματος «statistics_gabagool.py». Ο κώδικας του προγράμματος παρατίθεται στο [απόσπασμα κώδικα 1.2](#) του παραρτήματος. Σκοπός αυτού το προγράμματος είναι να επεξεργαστεί τα δεδομένα από το αρχείο trip_times_conc.csv, το οποίο περιέχει χρόνους και μήκη διαδρομής δρομολογίων για 187 ημέρες, έτσι ώστε να υπολογιστούν οι παράμετροι λογαριθμο-κανονικής κατανομής για τους χρόνους διαδρομής των δρομολογίων αυτών, καθώς και δείκτες της ποιότητας προσαρμογής των δεδομένων σε λογαριθμο-κανονική κατανομή.

Για το υπολογισμό των δεικτών ποιότητας προσαρμογής χρησιμοποιούνται οι εξής στατιστικοί έλεγχοι:

- D'Agostino: Ο συγκεκριμένος στατιστικός έλεγχος ενδείκνυται για μεσαία και μεγάλα δείγματα καθώς παράγει καλά αποτελέσματα για δείγματα με τουλάχιστον 50 στοιχεία [D'Agostino \(1971\)](#).
- Shapiro – Wilk: Παράγει καλά αποτελέσματα ακόμη και για μικρά δείγματα ($n < 20$) [Shapiro & Wilk \(1965\)](#). Για αρκετά μεγάλα δείγματα ($n > 5000$), ο αλγόριθμος της συγκεκριμένης μεθόδου (scipy.stats.shapiro) δεν παράγει ακριβείς τιμές τιμής πιθανότητας [Royston \(1995\)](#).

Τα αποτελέσματα αυτού του προγράμματος καταγράφονται στο κοινό αρχείο κειμένου **trip_statistics.csv**. Κάθε γραμμή του αρχείου αντιστοιχεί σε ένα δρομολόγιο, ενώ το αρχείο περιέχει τις εξής στήλες δεδομένων:

- trip_id: αποτελείται από τα ονόματα των δρομολογίων
- trip_score: δείκτης καλής προσαρμογής χρόνων διαδρομών, στην λογαριθμο-κανονική κατανομή
- normal_test_pValue: τιμή πιθανότητας (p value) της δοκιμής D' Agostino, για καλή προσαρμογή των φυσικών λογάριθμων των χρόνων διαδρομής του εκάστοτε δρομολογίου
- Shapiro-Wilk_pValue: τιμή πιθανότητας (p value) της δοκιμής Shapiro-Wilk, για καλή προσαρμογή των φυσικών λογάριθμων των χρόνων διαδρομής του εκάστοτε δρομολογίου
- t_tilde_shape: τιμή που αντιστοιχεί στην τυπική απόκλιση των φυσικών λογάριθμων των χρόνων διαδρομής του εκάστοτε δρομολογίου
- t_tilde_shape: τιμή που αντιστοιχεί στον αριθμό του Euler e , υψωμένο στη δύναμη της μέσης τιμής των φυσικών λογάριθμων των χρόνων διαδρομής του εκάστοτε δρομολογίου

4.3 Επεξεργασία αρχείων παραμέτρων

Η επεξεργασία πραγματοποιείται με το πρόγραμμα «trip_parameters_generator.py». Ο κώδικας παρατίθεται στο [απόσπασμα κώδικα 1.3](#) του παραρτήματος. Αρχικά, στο πρόγραμμα, από το αρχείο **trip_statistics.csv**, επιλέγονται 10 τυχαία δρομολόγια, εκ των 40 δρομολογίων με τους υψηλότερους δείκτες καλής προσαρμογής χρόνων διαδρομών στην λογαριθμο-κανονική κατανομή. Έπειτα, προστίθενται οι παράμετροι λογαριθμο-κανονικής κατανομής, των 10 επιλεγμένων δρομολογίων, στις υπηρεσίες διαδρομής, ενός εκ των αρχείων παραμέτρων δρομολόγησης, της αρχικής εργασίας (**D2_S2_C10_x_trips.txt**, όπου $x = \{a, b, c, d\}$ το σενάριο διαδρομών). Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται για όλα τα αρχεία παραμέτρων διαδρομών, τα οποία είναι 4 συνολικά, οπότε αυτή είναι η αιτία για την οποία λαμβάνεται δείγμα 40 δρομολογίων αρχικά.

Πίνακας 4.2: Διάταξη αρχείων παραμέτρων δρομολόγησης παρούσας εργασίας

Αριθμός Οχημάτων Κ	Αριθμός Διαδρομών Υπηρεσίας	λ	φ_{max}^k	φ_{min}^k	κόστος διαδρομής ανά km	ρυθμός φόρτισης ανά λεπτό	κατανάλωση ενέργειας ανά km	
Δείκτες κόμβων προέλευσης & προορισμού	Τεταγμένη θέση αρχής κόμβου	Τετμημένη θέση αρχής κόμβου	Τεταγμένη θέση τέλους κόμβου	Τετμημένη θέση τέλους κόμβου	l_i	u_i	ξ_i	$\exp(\mu_i)$
Δείκτες κόμβων υπηρεσίας								
Δείκτες κόμβων φόρτισης								

5. Εφαρμογή και Αποτελέσματα

5.1 Ορισμός αριθμητικού παραδείγματος

Σκοπός του παρακάτω αριθμητικού παραδείγματος αποτελεί η δοκιμή του μοντέλου που παρουσιάστηκε στην ενότητα 3 και η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων του. Χρησιμοποιούνται 4 σενάρια δρομολόγησης **(a,b,c,d)**, τα οποία λαμβάνονται από την αρχική εργασία. Συγκεκριμένα, οι θέσεις αρχής και τέλους των κόμβων κατανέμονται σε ένα κάρναβο με διαστάσεις 60x60 km. Τα χρονικά όρια ορίζονται με μεθοδολογία παρόμοια με την [Capraneto \(1989\)](#). Κάθε σενάριο δρομολόγησης αποτελείται από 10 διαδρομές υπηρεσίας $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ σε τυχαίες γραμμές, 2 φορτιστές και 2 οχήματα $k = 1,2$. Στον κάθε φορτιστή αντιστοιχούν 4 γεγονότα φόρτισης, τα οποία γεγονότα φόρτισης συνολικά ορίζονται ως εξής: $F = \{1001,1011,1021,1031\} \cup \{1002,1012,1022,1032\}$. Στο κάθε όχημα αντιστοιχεί ένας κόμβος προέλευσης/αμαξοστάσιο εκκίνησης ($o_1 = 11$ & $o_2 = 21$) και ένας κόμβος προορισμού/αμαξοστάσιο τερματισμού ($d_1 = 12$ & $d_2 = 22$).

Αναφέρεται πως οι στήλες l_i και u_i έχουν ως μονάδες μέτρησης τα λεπτά της ώρας.

Κόμβοι προέλευσης & προορισμού

Καθώς ένα όχημα δεν μετακινείται όσο βρίσκεται σε ένα αμαξοστάσιο, αλλά μένει σταθμευμένο, οι συντεταγμένες θέσης αρχής των κόμβων είναι ίδιες με τις συντεταγμένες θέσης τέλους τους. Επίσης, κάθε όχημα στο τέλος της βάρδιας του, επιστρέφει στο ίδιο αμαξοστάσιο από το οποίο ξεκίνησε την βάρδια του. Άρα ο κόμβος προέλευσης o_k ενός οχήματος $k \in K$ έχει τις ίδιες συντεταγμένες με τον κόμβο προορισμού του d_k . Ακόμη, το ανώτερο χρονικό όριο άφιξης u_{d_k} στον κόμβο προορισμού d_k ενός οχήματος k είναι πάντα υψηλότερο από το ανώτερο χρονικό όριο αναχώρησης u_{o_k} από τον κόμβο προέλευσης o_k του ίδιου οχήματος k , καθώς δεν είναι δυνατόν ένα όχημα να έχει γυρίσει στο αμαξοστάσιο τερματισμού του, χωρίς να έχει ξεκινήσει την βάρδια του. Επιπροσθέτως, πέρα από το κατώτερο χρονικό όριο αναχώρησης l_{o_k} από τον κόμβο προέλευσης o_k του οχήματος k και το αντίστοιχο κατώτερο χρονικό όριο άφιξης l_{d_k} στον κόμβο προορισμού d_k έχει μηδενική τιμή. Αυτό συμβαίνει, διότι υπάρχει η περίπτωση το όχημα k να μην χρειαστεί να δρομολογηθεί, οπότε παραμένει για όλη τη διάρκεια του σεναρίου δρομολόγησης στο αμαξοστάσιο του. Σε εκείνη την περίπτωση, απαιτείται να υπάρχει η δυνατότητα μιας εικονικής ταυτόχρονης αναχώρησης και άφιξης στο αμαξοστάσιο του οχήματος k κατά την χρονική στιγμή $T_{o_k} = T_{d_k} = 0$. Οι παράμετροι που σχετίζονται με τους παραπάνω κόμβους παρουσιάζονται παρακάτω, στον πίνακα 5.1.1.

Πίνακας 5.1.1: Παράμετροι κόμβων προέλευσης-προορισμού/ αμαξοστασίων

Δείκτης κόμβου	Τεταγμένη θέσης αρχής κόμβου	Τετμημένη θέσης αρχής κόμβου	Τεταγμένη θέσης τέλους κόμβου	Τετμημένη θέσης τέλους κόμβου	l_i	u_i
Σενάριο: a						
11	56	1	56	1	0	480
12	36	54	36	54	0	480
21	56	1	56	1	0	1080
22	36	54	36	54	0	1080
Σενάριο: b						
11	17	24	17	24	0	480
12	33	54	33	54	0	480
21	17	24	17	24	0	1080
22	33	54	33	54	0	1080
Σενάριο: c						
11	58	28	58	28	0	480
12	17	53	17	53	0	480
21	58	28	58	28	0	1080
22	17	53	17	53	0	1080
Σενάριο: d						
11	2	10	2	10	0	480
12	47	55	47	55	0	480
21	2	10	2	10	0	1080
22	47	55	47	55	0	1080

Κόμβοι υπηρεσίας

Οι παράμετροι αυτού του τύπου κόμβου έχουν περιγραφεί εκτενώς στην 3^η ενότητα. Η μόνη αξιοσημείωτη ιδιότητα των παραμέτρων, που δεν έχει αναφερθεί ακόμη, είναι πως για κάθε κόμβο $i \in V$ το ανώτατο χρονικό όριο u_i εκκίνησης υπηρεσίας είναι κατά 400 λεπτά υψηλότερο από το αντίστοιχο κατώτατο χρονικό όριο l_i . Επίσης, η μονάδα μέτρησης των μ_i και ξ_i είναι ο φυσικός λογάριθμος των δευτερολέπτων της ώρας. Παρατίθενται οι τιμές των κόμβων παρακάτω, στον πίνακα 5.1.2.

Πίνακας 5.1.2: Παράμετροι κόμβων υπηρεσίας

Δείκτης κόμβου	Τεταγμένη θέσης αρχής κόμβου	Τετμημένη θέσης αρχής κόμβου	Τεταγμένη θέσης τέλους κόμβου	Τετμημένη θέσης τέλους κόμβου	l_i	u_i	ξ_i	$\exp(\mu_i)$
Σενάριο: a								
1	1	40	11	48	40	440	0,375	1239,332
2	21	2	16	58	15	415	0,435	1316,820
3	55	55	46	51	104	504	0,387	1191,878
4	33	12	17	6	144	544	0,374	1027,800
5	16	24	52	8	250	650	0,394	1219,124
6	10	42	19	19	238	638	0,413	1716,638
7	52	33	39	16	355	755	0,400	1101,319
8	23	44	56	21	316	716	0,378	873,533
9	17	36	33	11	446	846	0,373	749,333
10	48	28	35	47	448	848	0,391	1050,491
Σενάριο: b								
1	21	25	16	13	26	426	0,320	999,906
2	29	17	16	1	26	426	0,395	1258,506
3	21	57	36	48	114	514	0,325	1148,150
4	22	14	17	15	150	550	0,345	1257,082
5	18	41	38	25	228	628	0,438	1071,229
6	19	13	2	57	236	636	0,363	1275,500
7	20	33	19	49	324	724	0,400	1421,056
8	23	45	30	36	321	721	0,350	2262,859
9	53	31	39	56	402	802	0,474	1107,815
10	27	27	10	5	409	809	0,383	630,540
Σενάριο: c								
1	52	58	12	38	22	422	0,433	1233,598
2	54	4	43	31	16	416	0,396	1062,877
3	44	24	30	55	158	558	0,356	650,622
4	17	7	18	2	113	513	0,431	826,836
5	40	28	20	32	202	602	0,384	1335,253
6	49	36	20	44	231	631	0,488	839,893
7	7	18	33	20	344	744	0,431	905,527
8	41	29	32	33	313	713	0,406	1295,796
9	37	41	30	55	429	829	0,426	1194,150
10	51	29	4	20	459	859	0,413	1305,510
Σενάριο: d								
1	46	8	11	50	52	452	0,442	1230,547
2	37	58	17	33	51	451	0,375	772,440
3	36	16	44	53	127	527	0,393	898,384
4	48	22	4	41	125	525	0,402	1630,079
5	39	11	22	6	245	645	0,423	844,820
6	32	47	39	27	225	625	0,386	922,120
7	37	7	40	13	336	736	0,417	1099,089
8	16	27	44	14	330	730	0,420	1704,108
9	14	24	47	57	423	823	0,386	1091,990
10	10	49	24	32	443	843	0,434	1053,837

Κόμβοι φόρτισης

Καθώς ένα όχημα δεν μετακινείται, αλλά παραμένει σταθευμένο, κατά τη διάρκεια της φόρτισής του, οι συντεταγμένες τέλους των κόμβων ταυτίζονται με τις συντεταγμένες αρχής. Επίσης, οι κόμβοι φόρτισης που αφορούν τον ίδιο φορτιστή έχουν ίδιες συντεταγμένες. Ακόμη, κάθε επακόλουθο γεγονός φόρτισης σε ένα

φορτιστή έχει κατώτατο χρονικό όριο εκκίνησης γεγονότος φόρτισης l_i υψηλότερο από το αντίστοιχο χρονικό όριο του προηγούμενου γεγονότος φόρτισης και το ίδιο ισχύει για τα ανώτατα χρονικά όρια εκκίνησης γεγονότος φόρτισης u_i . Επίσης, κάθε ανώτατο χρονικό όριο εκκίνησης γεγονότος φόρτισης u_i είναι κατά 400 λεπτά υψηλότερο από το αντίστοιχο κατώτερο χρονικό όριο εκκίνησης γεγονότος φόρτισης l_i . Οι παράμετροι που αφορούν τους σχετικούς κόμβους αναφέρονται παρακάτω, στον πίνακα 5.1.3.

Πίνακας 5.1.3: Παράμετροι κόμβων φόρτισης

Δείκτης κόμβου	Τεταγμένη θέσης αρχής κόμβου	Τετμημένη θέσης αρχής κόμβου	Τεταγμένη θέσης τέλους κόμβου	Τετμημένη θέσης τέλους κόμβου	l_i	u_i
Σενάριο: a						
1001	9	29	9	29	115	515
1002	55	42	55	42	145	545
1011	9	29	9	29	230	630
1012	55	42	55	42	249	649
1021	9	29	9	29	332	732
1022	55	42	55	42	311	711
1031	9	29	9	29	408	808
1032	55	42	55	42	405	805
Σενάριο: b						
1001	39	36	39	36	157	557
1002	37	44	37	44	126	526
1011	39	36	39	36	211	611
1012	37	44	37	44	226	626
1021	39	36	39	36	344	744
1022	37	44	37	44	303	703
1031	39	36	39	36	440	840
1032	37	44	37	44	425	825
Σενάριο: c						
1001	10	10	10	10	107	507
1002	30	44	30	44	155	555
1011	10	10	10	10	245	645
1012	30	44	30	44	244	644
1021	10	10	10	10	329	729
1022	30	44	30	44	335	735
1031	10	10	10	10	428	828
1032	30	44	30	44	426	826
Σενάριο: d						
1001	7	50	7	50	126	526
1002	29	15	29	15	110	510
1011	7	50	7	50	209	609
1012	29	15	29	15	202	602
1021	7	50	7	50	334	734
1022	29	15	29	15	348	748
1031	7	50	7	50	424	824
1032	29	15	29	15	437	837

Λοιπές παράμετροι

Για κάθε σενάριο δρομολόγησης, λαμβάνονται ως δεδομένα τα παρακάτω μεγέθη:

- Μοναδιαίο κόστος αναμονής οχήματος $\lambda = 2$ μονάδες κόστους/λεπτό

- SoC μπαταρίας οχήματος k , όταν είναι πλήρως φορτισμένο $\varphi_{max}^k = 300$ μονάδες ενέργειας
- Ελάχιστο επιτρεπόμενο επίπεδο SoC, μπαταρίας οχήματος k $\varphi_{min}^k = 10$ μονάδες ενέργειας
- Μοναδιαίο κόστος διαδρομής = 10 μονάδες κόστους/km
- Ρυθμός φόρτισης σταθμών φόρτισης $r = 10$ μονάδες ενέργειας/min
- Μοναδιαία κατανάλωση ενέργειας = 1,3 μονάδες ενέργειας/km

Όπως αναφέρθηκε και στην 4^η ενότητα, ορίζονται $|S| = 100$ περιπτώσεις $s \in S$ χρόνων διαδρομής \tilde{t}_i^s για κάθε διαδρομή υπηρεσίας $i \in V$. Αυτές δημιουργούνται με την εξής διαδικασία:

- Για κάθε διαδρομή υπηρεσίας $i \in V$, δημιουργείται δείγμα $N = |S|$, το οποίο ακολουθεί κανονική κατανομή, με μέση τιμή μ_i και τυπική απόκλιση ξ_i . Για τη δημιουργία του ίδιου δείγματος, σε κάθε εκτέλεση του πειράματος, τίθεται τιμή seed ίση με 23.
- Κάθε τιμή $s \in S$ του παραπάνω δείγματος χρησιμοποιείται ως εκθέτης που υψώνει τον αριθμό του Euler (e). Ως το αποτέλεσμα αυτού του υπολογισμού ορίζονται οι τιμές των χρόνων διαδρομής \tilde{t}_i^s .

Οι τιμές των \tilde{t}_i^s , για το αντίστοιχο σενάριο δρομολόγησης, παρατίθενται στους πίνακες [1a](#), [1b](#), [1c](#), [1d](#) του παραρτήματος.

Η κατανάλωση ενέργειας η_i κατά την εκτέλεση της διαδρομής υπηρεσίας $i \in V$, υπολογίζεται ως το γινόμενο της μοναδιαίας κατανάλωσης ενέργειας (1,3 μονάδες ενέργειας/km) επί το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τη θέση τέλους με την θέση αρχής του σχετικού κόμβου υπηρεσίας. Οι τιμές η_i παρουσιάζονται παρακάτω, στον πίνακα 5.1.4.

Πίνακας 5.1.4: Τιμές η_i (μονάδες ενέργειας), για κάθε σενάριο δρομολόγησης

Σενάριο	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5	i = 6	i = 7	i = 8	i = 9	i = 10
a	16,648	73,090	12,804	22,214	51,214	32,108	27,821	52,292	38,586	29,928
b	16,900	26,800	22,741	6,629	33,296	61,321	20,841	14,822	37,249	36,144
c	58,138	37,901	44,219	6,629	26,515	39,108	33,900	12,804	20,348	62,210
d	71,073	41,620	49,211	62,305	23,036	27,547	8,721	40,132	60,670	28,630

Ο χρόνος διαδρομής t_{ij} κατά τη μετάβαση από την θέση τέλους του κόμβου $i \in N$, στην θέση αρχής του κόμβου $j \in N$, υπολογίζεται ως το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος μεταξύ των 2 εκείνων σημείων. Προφανώς, γίνεται η παραδοχή πως κάθε λεπτό, το όχημα διανύει ένα χιλιόμετρο. Επίσης, γίνεται η παραδοχή πως αν οι κόμβοι i & j είναι κόμβοι υπηρεσίας (δηλαδή $i \in V$ & $j \in V$), τότε $t_{ij} = 0$. Οι τιμές t_{ij} παρουσιάζονται στους πίνακες 5.1.5a, 5.1.5b, 5.1.5c, 5.1.5d, αντίστοιχα για κάθε σενάριο.

Πίνακας 5.1.5a: Τιμές t_{ij} (min), για το σενάριο δρομολόγησης a

		Σενάριο: a																					
j	i=11	i=21	i=12	i=22	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10	i=1001	i=1002	i=1011	i=1012	i=1021	i=1022	i=1031	i=1032	
j=11	0	0,00	56,65	56,65	65,07	69,63	50,99	39,32	8,06	41,15	22,67	20,00	25,08	50,57	54,71	41,01	54,71	41,01	54,71	41,01	54,71	41,01	54,71
j=21	0,00	0	56,65	56,65	65,07	69,63	50,99	39,32	8,06	41,15	22,67	20,00	25,08	50,57	54,71	41,01	54,71	41,01	54,71	41,01	54,71	41,01	54,71
j=12	56,65	56,65	0	0,00	25,71	20,40	10,44	51,62	48,70	38,91	38,12	38,59	43,10	7,07	36,80	22,47	36,80	22,47	36,80	22,47	36,80	22,47	36,80
j=22	56,65	56,65	0,00	0	25,71	20,40	10,44	51,62	48,70	38,91	38,12	38,59	43,10	7,07	36,80	22,47	36,80	22,47	36,80	22,47	36,80	22,47	36,80
j=1	67,42	67,42	37,70	37,70	0	23,43	46,32	37,58	60,21	27,66	44,94	58,19	43,19	34,71	13,60	54,04	13,60	54,04	13,60	54,04	13,60	54,04	13,60
j=2	35,01	35,01	54,12	54,12	47,07	0	55,01	5,66	31,58	17,12	22,80	39,82	15,00	47,13	29,55	52,50	29,55	52,50	29,55	52,50	29,55	52,50	
j=3	54,01	54,01	19,03	19,03	44,55	39,12	0	62,01	47,10	50,91	42,15	34,01	49,19	21,54	52,84	13,00	52,84	13,00	52,84	13,00	52,84	13,00	52,84
j=4	25,50	25,50	42,11	42,11	42,19	49,04	41,11	0	19,42	15,65	7,21	24,70	1,00	35,06	29,41	37,20	29,41	37,20	29,41	37,20	29,41	37,20	
j=5	46,14	46,14	36,06	36,06	24,52	34,00	40,36	18,03	0	5,83	24,35	40,11	21,40	29,83	8,60	42,95	8,60	42,95	8,60	42,95	8,60	42,95	
j=6	61,62	61,62	28,64	28,64	6,08	17,09	37,11	36,67	54,04	0	38,95	50,57	38,60	25,50	13,04	45,00	13,04	45,00	13,04	45,00	13,04	45,00	
j=7	32,25	32,25	26,40	26,40	43,66	43,83	18,97	44,20	25,00	35,85	0	12,65	29,07	22,02	43,19	9,49	43,19	9,49	43,19	9,49	43,19	9,49	
j=8	54,20	54,20	16,40	16,40	12,65	15,65	24,04	38,47	46,23	25,32	32,25	0	34,48	12,37	20,52	32,06	20,52	32,06	20,52	32,06	20,52	32,06	
j=9	52,40	52,40	26,17	26,17	13,42	22,02	32,65	30,00	44,42	17,12	29,73	41,79	0	21,10	10,63	38,47	10,63	38,47	10,63	38,47	10,63	38,47	
j=10	28,16	28,16	28,64	28,64	42,06	43,86	23,09	38,01	20,40	30,36	15,00	10,63	22,67	0	39,01	15,65	39,01	15,65	39,01	15,65	39,01	15,65	
j=1001	54,71	54,71	36,80	36,80	19,10	29,83	43,05	24,35	47,85	14,14	32,70	47,68	38,00	31,62	0	47,80	0,00	47,80	0,00	47,80	0,00	47,80	
j=1002	41,01	41,01	22,47	22,47	44,41	42,15	12,73	52,35	34,13	42,72	30,53	21,02	38,01	20,62	47,80	0	47,80	0,00	47,80	0,00	47,80	0,00	
j=1011	54,71	54,71	36,80	36,80	19,10	29,83	43,05	24,35	47,85	14,14	32,70	47,68	38,00	31,62	0,00	47,80	0	47,80	0,00	47,80	0,00	47,80	
j=1012	41,01	41,01	22,47	22,47	44,41	42,15	12,73	52,35	34,13	42,72	30,53	21,02	38,01	20,62	47,80	0,00	47,80	0,00	47,80	0,00	47,80	0,00	
j=1021	54,71	54,71	36,80	36,80	19,10	29,83	43,05	24,35	47,85	14,14	32,70	47,68	38,00	31,62	0,00	47,80	0,00	47,80	0,00	47,80	0,00	47,80	
j=1022	41,01	41,01	22,47	22,47	44,41	42,15	12,73	52,35	34,13	42,72	30,53	21,02	38,01	20,62	47,80	0,00	47,80	0,00	47,80	0,00	47,80	0,00	
j=1031	54,71	54,71	36,80	36,80	19,10	29,83	43,05	24,35	47,85	14,14	32,70	47,68	38,00	31,62	0,00	47,80	0,00	47,80	0,00	47,80	0,00	47,80	
j=1032	41,01	41,01	22,47	22,47	44,41	42,15	12,73	52,35	34,13	42,72	30,53	21,02	38,01	20,62	47,80	0,00	47,80	0,00	47,80	0,00	47,80	0,00	

Πίνακας 5.1.5b: Τιμές t_{ij} (min), για το σενάριο δρομολόγησης b

		Σενάριο: b																				
j	i=11	i=21	i=12	i=22	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10	i=1001	i=1002	i=1011	i=1012	i=1021	i=1022	i=1031	i=1032
j=11	0	0,00	34,00	34,00	11,05	23,02	30,61	9,00	21,02	36,25	25,08	17,69	38,83	20,25	25,06	28,28	25,06	28,28	25,06	28,28	25,06	28,28
j=21	0,00	0	34,00	34,00	11,05	23,02	30,61	9,00	21,02	36,25	25,08	17,69	38,83	20,25	25,06	28,28	25,06	28,28	25,06	28,28	25,06	28,28
j=12	34,00	34,00	0	0,00	44,38	55,66	6,71	42,15	29,43	31,14	14,87	18,25	6,32	54,13	18,97	10,77	18,97	10,77	18,97	10,77	18,97	
j=22	34,00	34,00	0,00	0	44,38	55,66	6,71	42,15	29,43	31,14	14,87	18,25	6,32	54,13	18,97	10,77	18,97	10,77	18,97	10,77	18,97	
j=1	4,12	4,12	31,38	31,38	0	24,52	27,46	10,77	17,00	37,22	24,08	14,21	35,85	22,83	21,10	24,84	21,10	24,84	21,10	24,84	21,10	
j=2	13,89	13,89	37,22	37,22	13,60	0	31,78	12,17	12,04	48,26	33,53	19,03	40,26	22,47	21,47	28,16	21,47	28,16	21,47	28,16		
j=3	33,24	33,24	12,37	12,37	44,28	56,22	0	42,19	36,24	19,00	8,25	22,85	18,03	53,15	27,66	20,62	27,66	20,62	27,66			
j=4	11,18	11,18	41,48	41,48	6,08	14,32	36,77	0	19,42	47,42	35,13	23,41	45,31	15,00	27,80	33,54	27,80	33,54	27,80			
j=5	9,49	9,49	19,85	19,85	28,07	40,05	19,31	26,02	0	22,63	8,06	13,00	25,81	36,88	21,59	19,24	21,59	19,24	21,59			
j=6	11,18	11,18	43,32	43,32	3,00	12,37	38,91	2,83	22,47	0	36,00	25,50	47,42	12,04	30,48	35,85	30,48	35,85	30,48			
j=7	9,49	9,49	24,70	24,70	20,40	32,25	21,93	18,25	19,70	30,00	0	10,44	29,83	29,73	19,24	20,25	19,24	20,25	19,24			
j=8	21,84	21,84	13,45	13,45	32,76	44,55	13,34	30,59	25,00	24,19	5,66	0	19,42	42,06	18,36	14,04	18,36	14,04	18,36			
j=9	36,67	36,67	30,48	30,48	41,15	47,63	24,04	39,40	16,16	57,25	38,47	23,54	0	50,25	14,87	20,62	14,87	20,62	14,87			
j=10	10,44	10,44	27,66	27,66	17,80	28,23	22,85	15,62	11,18	39,05	23,41	9,49	31,38	0	15,00	19,72	15,00	19,72	15,00			
j=1001	25,06	25,06	18,97	18,97	32,53	41,88	12,37	30,41	11,05	42,54	23,85	9,00	20,00	42,45	0	8,25	0,00	8,25	0,00			
j=1002	28,28	28,28	10,77	10,77	37,44	47,85	4,12	35,23	19,03	37,34	18,68	10,63	12,17	47,43	8,25	0	8,25	0,00	8,25			
j=1011	25,06	25,06	18,97	18,97	32,53	41,88	12,37	30,41	11,05	42,54	23,85	9,00	20,00	42,45	0,00	8,25	0	8,25	0,00			
j=1012	28,28	28,28	10,77	10,77	37,44	47,85	4,12	35,23	19,03	37,34	18,68	10,63	12,17	47,43	8,25	0,00	8,25	0,00	8,25			
j=1021	25,06	25,06	18,97	18,97	32,53	41,88	12,37	30,41	11,05	42,54	23,85	9,00	20,00	42,45	0,00	8,25	0,00	8,25	0,00			
j=1022	28,28	28,28	10,77	10,77	37,44	47,85	4,12	35,23	19,03	37,34	18,68	10,63	12,17	47,43	8,25	0,00	8,25	0,00	8,25			
j=1031	25,06	25,06	18,97	18,97	32,53	41,88	12,37	30,41	11,05	42,54	23,85	9,00	20,00	42,45	0,00	8,25	0,00	8,25	0,00			
j=1032	28,28	28,28	10,77	10,77	37,44	47,85	4,12	35,23	19,03	37,34	18,68	10,63	12,17	47,43	8,25	0,00	8,25	0,00	8,25			

Πίνακας 5.1.5c: Τιμές t_{ij} (min), για το σενάριο δρομολόγησης c

		Σενάριο: c																				
j	i=11	i=21	i=12	i=22	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10	i=1001	i=1002	i=1011	i=1012	i=1021	i=1022	i=1031	i=1032
j=11	0	0,00	48,02	48,02	47,07	15,30	38,90	47,71	38,21	41,23	26,25	26,48	38,90	54,59	51,26	32,25	51,26	32,25	51,26	32,25	51,26	
j=21	0,00	0	48,02	48,02	47,07	15,30	38,90	47,71	38,21	41,23	26,25	26,48	38,90	54,59	51,26	32,25	51,26	32,25	51,26	32,25		
j=12	48,02	48,02	0	0,00	15,81	34,06	13,15	51,01	21,21	9,49	36,67	25,00	13,15	35,47	43,5							

Πίνακας 5.1.5d: Τιμές t_{ij} (min) , για το σενάριο δρομολόγησης d

		Σενάριο: d																					
j	i=11	i=21	i=12	i=22	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10	i=1001	i=1002	i=1011	i=1012	i=1021	i=1022	i=1031	i=1032	
j=11	0	0,00	63,64	63,64	41,00	27,46	60,11	31,06	20,40	40,72	38,12	42,19	65,07	31,11	40,31	27,46	40,31	27,46	40,31	27,46	40,31	27,46	40,31
j=21	0,00	0	63,64	63,64	41,00	27,46	60,11	31,06	20,40	40,72	38,12	42,19	65,07	31,11	40,31	27,46	40,31	27,46	40,31	27,46	40,31	27,46	40,31
j=12	63,64	63,64	0	0,00	36,35	37,20	3,61	45,22	55,01	29,12	42,58	41,11	2,00	32,53	40,31	43,86	40,31	43,86	40,31	43,86	40,31	43,86	40,31
j=22	63,64	63,64	0,00	0	36,35	37,20	3,61	45,22	55,01	29,12	42,58	41,11	2,00	32,53	40,31	43,86	40,31	43,86	40,31	43,86	40,31	43,86	40,31
j=1	44,05	44,05	47,01	47,01	0	38,29	45,04	53,41	24,08	20,25	7,81	6,32	49,01	32,56	57,31	18,38	57,31	18,38	57,31	18,38	57,31	18,38	57,31
j=2	59,41	59,41	10,44	10,44	27,20	0	8,60	37,12	54,12	31,06	45,10	44,55	10,05	29,07	31,05	43,74	31,05	43,74	31,05	43,74	31,05	43,74	31,05
j=3	34,53	34,53	40,52	40,52	42,20	25,50	0	40,61	17,20	11,40	5,00	8,25	42,45	20,00	44,69	7,07	44,69	7,07	44,69	7,07	44,69	7,07	44,69
j=4	47,54	47,54	33,02	33,02	46,40	32,89	31,26	0	30,53	10,30	12,04	8,94	35,01	26,00	49,65	20,25	49,65	20,25	49,65	20,25	49,65	20,25	49,65
j=5	37,01	37,01	44,72	44,72	48,01	31,11	42,30	46,10	0	16,00	2,24	5,83	46,69	25,81	50,45	10,77	50,45	10,77	50,45	10,77	50,45	10,77	50,45
j=6	47,63	47,63	17,00	17,00	21,21	20,52	13,42	28,64	42,20	0	34,93	35,11	18,03	17,00	25,18	32,14	25,18	32,14	25,18	32,14	25,18	32,14	25,18
j=7	35,13	35,13	49,03	49,03	50,25	32,80	46,53	47,38	15,03	20,10	0	9,90	50,99	28,18	52,43	11,31	52,43	11,31	52,43	11,31	52,43	11,31	52,43
j=8	22,02	22,02	41,77	41,77	23,54	6,08	38,21	18,44	21,84	23,00	27,78	0	43,14	9,43	24,70	17,69	24,70	17,69	24,70	17,69	24,70	17,69	24,70
j=9	18,44	18,44	45,28	45,28	26,17	9,49	41,73	19,72	19,70	25,18	28,23	31,62	0	12,81	26,93	17,49	26,93	17,49	26,93	17,49	26,93	17,49	26,93
j=10	39,81	39,81	37,48	37,48	1,41	17,46	34,23	10,00	44,64	46,86	48,80	37,85	0	3,16	38,95	3,16	38,95	3,16	38,95	3,16	38,95	3,16	38,95
j=1001	40,31	40,31	40,31	40,31	4,00	19,72	37,12	9,49	46,49	39,41	49,58	51,62	40,61	24,76	0	41,34	0,00	41,34	0,00	41,34	0,00	41,34	0,00
j=1002	27,46	27,46	43,86	43,86	39,36	21,63	40,85	36,07	11,40	15,62	11,18	15,03	45,69	17,72	41,34	0	41,34	0,00	41,34	0,00	41,34	0,00	41,34
j=1011	40,31	40,31	40,31	40,31	4,00	19,72	37,12	9,49	46,49	39,41	49,58	51,62	40,61	24,76	0,00	41,34	0	41,34	0,00	41,34	0,00	41,34	0,00
j=1012	27,46	27,46	43,86	43,86	39,36	21,63	40,85	36,07	11,40	15,62	11,18	15,03	45,69	17,72	41,34	0,00	41,34	0,00	41,34	0,00	41,34	0,00	41,34
j=1021	40,31	40,31	40,31	40,31	4,00	19,72	37,12	9,49	46,49	39,41	49,58	51,62	40,61	24,76	0,00	41,34	0,00	41,34	0,00	41,34	0,00	41,34	0,00
j=1022	27,46	27,46	43,86	43,86	39,36	21,63	40,85	36,07	11,40	15,62	11,18	15,03	45,69	17,72	41,34	0,00	41,34	0,00	41,34	0,00	41,34	0,00	41,34
j=1031	40,31	40,31	40,31	40,31	4,00	19,72	37,12	9,49	46,49	39,41	49,58	51,62	40,61	24,76	0,00	41,34	0,00	41,34	0,00	41,34	0,00	41,34	0,00
j=1032	27,46	27,46	43,86	43,86	39,36	21,63	40,85	36,07	11,40	15,62	11,18	15,03	45,69	17,72	41,34	0,00	41,34	0,00	41,34	0,00	41,34	0,00	41,34

Η σταθερή συνιστώσα του κόστους, κατά την πραγματοποίηση της εργασίας $j \in N - \{i\}$ μετά την εργασία $i \in N$, χωρίς να λαμβάνονται υπόψιν τυχόν καθυστερήσεις, για το όχημα $k \in K$, b_{ij}^k υπολογίζεται ως το γινόμενο του χρόνου διαδρομής μεταξύ της θέσης τέλους του κόμβου i και της θέσης αρχής του κόμβου j t_{ij} , επί το μοναδιαίο κόστος διαδρομής (10 μονάδες κόστους/km). Οι τιμές της, για κάθε σενάριο αντίστοιχα, παρουσιάζονται στους πίνακες 5.1.6a, 5.1.6b, 5.1.6c, 5.1.6d, παρακάτω.

Πίνακας 5.1.6a: Τιμές b_{ij}^k (μονάδες κόστους) , για το σενάριο δρομολόγησης a

		Σενάριο: a																					
j	i=11	i=21	i=12	i=22	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10	i=1001	i=1002	i=1011	i=1012	i=1021	i=1022	i=1031	i=1032	
j=11	0	0,00	566,48	566,48	650,69	696,35	509,90	393,19	80,62	411,46	226,72	200,00	250,80	505,67	547,08	410,12	547,08	410,12	547,08	410,12	547,08	410,12	547,08
j=21	0,00	0	566,48	566,48	650,69	696,35	509,90	393,19	80,62	411,46	226,72	200,00	250,80	505,67	547,08	410,12	547,08	410,12	547,08	410,12	547,08	410,12	547,08
j=12	566,48	566,48	0	0,00	257,10	203,96	104,40	516,24	487,03	389,10	381,18	385,88	431,05	70,71	367,97	224,72	367,97	224,72	367,97	224,72	367,97	224,72	367,97
j=22	566,48	566,48	0,00	0	257,10	203,96	104,40	516,24	487,03	389,10	381,18	385,88	431,05	70,71	367,97	224,72	367,97	224,72	367,97	224,72	367,97	224,72	367,97
j=1	674,24	674,24	376,96	376,96	128,062	234,31	463,25	375,77	602,08	276,59	449,44	581,89	431,86	347,13	136,01	540,37	136,01	540,37	136,01	540,37	136,01	540,37	136,01
j=2	350,14	350,14	541,20	541,20	470,74	562,228	550,09	56,57	315,75	171,17	228,04	398,25	150,00	471,27	295,47	524,98	295,47	524,98	295,47	524,98	295,47	524,98	295,47
j=3	540,09	540,09	190,26	190,26	445,53	391,15	98,4886	620,08	470,96	509,12	421,54	340,15	491,93	215,41	528,39	130,00	528,39	130,00	528,39	130,00	528,39	130,00	528,39
j=4	254,95	254,95	421,07	421,07	421,90	490,41	411,10	170,88	194,16	156,52	72,11	246,98	10,00	350,57	294,11	372,02	294,11	372,02	294,11	372,02	294,11	372,02	294,11
j=5	461,41	461,41	360,56	360,56	245,15	340,00	403,61	180,28	393,954	58,31	243,52	401,12	214,01	298,33	86,02	429,53	86,02	429,53	86,02	429,53	86,02	429,53	86,02
j=6	616,20	616,20	286,36	286,36	60,83	170,88	371,08	366,74	540,37	246,982	389,49	505,67	386,01	254,95	130,38	450,00	130,38	450,00	130,38	450,00	130,38	450,00	130,38
j=7	322,49	322,49	264,01	264,01	436,58	438,29	189,74	442,04	250,00	358,47	214,009	126,49	290,69	220,23	431,86	94,87	431,86	94,87	431,86	94,87	431,86	94,87	431,86
j=8	542,03	542,03	164,01	164,01	126,49	156,52	240,42	384,71	462,28	253,18	322,49	402,244	344,82	123,69	205,18	320,62	205,18	320,62	205,18	320,62	205,18	320,62	205,18
j=9	524,02	524,02	261,73	261,73	134,16	220,23	326,50	300,00	448,22	171,17	297,32	417,85	296,816	210,95	106,30	384,71	106,30	384,71	106,30	384,71	106,30	384,71	106,30
j=10	281,60	281,60	286,36	286,36	420,59	438,63	230,87	380,13	203,96	303,64	150,00	106,30	226,72	230,217	390,13	156,52	390,13	156,52	390,13	156,52	390,13	156,52	390,13
j=1001	547,08	547,08	367,97	367,97	191,05	298,33	430,46	243,52	478,54	141,42	326,96	476,76	300,00	316,23	0	478,02	0,00	478,02	0,00	478,02	0,00	478,02	0,00
j=1002	410,12	410,12	224,72	224,72	444,07	421,54	127,28	523,45	341,32	427,20	305,29	210,24	380,13	206,16	478,02	0	478,02	0,00	478,02	0,00	478,02	0,00	478,02
j=1011	547,08	547,08	367,97	367,97	191,05	298,33	430,46	243,52	478,54	141,42	326,96	476,76	300,00	316,23	0,00	478,02	0	478,02	0,00	478,02	0,00	478,02	0,00
j=1012	410,12	410,12	224,72	224,72	444,07	421,54	127,28	523,45	341,32	427,20	305,29	210,24	380,13	206,16	478,02	0,00	478,02	0	478,02	0,00	478,02	0,00	478,02
j=1021	547,08	547,08	367,97	367,97	191,05	298,33	430,46	243,52	478,54	141,42	326,96	476,76	300,00	316,23	0,00	478,02	0,00	478,02	0,00	478,02	0,00	478,02	0,00
j=1022	410,12	410,12	224,72	224,72	444,07	421,54	127,28	523,45	341,32	427,20	305,29	210,24	380,13	206,16	478,02	0,00	478,02	0,00	478,02	0,00	478,02	0,00	478,02
j=1031	547,08	547,08	367,97	367,97	191,05	298,33	430,46	243,52	478,54	141,42	326,96	476,76	300,00	316,23	0,00	478,02	0,00	478,02	0,00	478,02	0,00	478,02	0,00
j=1032	410,12	410,12	224,72	224,72	444,07	421,54	127,28	523,45	341,32	427,20	305,29	210,24	380,13	206,16	478,02	0,00	478,02	0,00	478,02	0,00	478,02	0,00	478,02

Πίνακας 5.1.6b: Τιμές b_{ij}^k (μονάδες κόστους) , για το σενάριο δρομολόγησης b

		Σενάριο: b																					
j	i=11	i=21	i=12	i=22	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10	i=1001	i=1002	i=1011	i=1012	i=1021	i=1022	i=1031	i=1032	
j=11	0	0,00	340,00	340,00	110,45	230,22	306,10	90,00	210,24	362,49	250,80	176,92	388,33	202,48	250,60	282,84	250,60	282,84	250,60	282,84	250,60	282,84	282,84
j=21	0,00	0	340,00	340,00	110,45	230,22	306,10	90,00	210,24	362,49	250,80	176,92	388,33	202,48	250,60	282,84	250,60	282,84	250,60	282,84	250,60	282,84	282,84
j=12	340,00	340,00	0	0	443,85	556,60	67,08	421,54	294,28	311,45	148,66	182,48	63,25	541,29	189,74	107,70	189,74	107,70	189,74	107,70	189,74	107,70	189,74
j=22	340,00	340,00	0,00	0	443,85	556,60	67,08	421,54	294,28	311,45	148,66	182,48	63,25	541,29	189,74	107,70	189,74	107,70	189,74	107,70	189,74	107,70	189,74
j=1	41,23	41,23	313,85	313,85	130	245,15	274,59	107,70	170,00	372,16	240,83	142,13	358,47	228,25	210,95	248,39	210,95	248,39	210,95	248,39	210,95	248,39	248,39
j=2	138,92	138,92	372,16	372,16	136,01	206,155	317,80	121,66	120,42	482,60	335,26	190,26	402,62	224,72	214,71	281,60	214,71	281,60	214,71	281,60	214,71	281,60	
j=3	332,42	332,42	123,69	123,69	442,83	562,23	174,929	421,90	362,35	190,00	82,46	228,47	180,28	531,51	276,59	206,16	276,59	206,16	276,59	206,16	276,59	206,16	
j=4	111,80	111,80	414,85	414,85	60,83	143,18	367,70	50,9902	194,16	474,24	351,28	234,09	453,10	150,00	278,03	335,41	278,03	335,41	278,03	335,41	278,03	335,41	
j=5	170,29	170,29	198,49	198,49	280,71	400,50	193,13	260,19	256,125	226,27	80,62	130,00	258,07	368,78	215,87	192,35	215,87	192,35	215,87	192,35	215,87	192,35	
j=6	111,80	111,80	433,24	433,24	30,00	123,69	389,10	28,28	224,72	471,699	360,00	254,95	474,24	120,42	304,80	358,47	304,80	358,47	304,80	358,47	304,80	358,47	
j=7	94,87	94,87	246,98	246,98	203,96	322,49	219,32	182,48	196,98	300,00	160,312	104,40	298,33	297,32	192,35	202,48	192,35	202,48	192,35	202,48	192,35	202,48	
j=8	218,40	218,40	134,54	134,54	327,57	445,53	133,42	305,94	250,00	241,87	56,57	114,018	194,16	420,59	183,58	140,36	183,58	140,36	183,58	140,36	183,58	140,36	
j=9	366,74	366,74	304,80	304,80	411,46	476,34	240,42	393,95	161,55	572,45	384,71	235,37	286,531	502,49	148,66	206,16	148,66	206,16	148,66	206,16	148,66	206,16	
j=10	104,40	104,40	276,59	276,59	178,04	282,31	228,47	156,20	111,80	390,51	234,09	94,87	313,85	278,029	150,00	197,23	150,00	197,23	150,00	197,23	150,00	197,23	
j=1001	250,60	250,60	189,74	189,74	325,27	418,81	123,69	304,14	110,45	425,44	238,54	90,00	200,00	424,50	0	82,46	0	82,46	0	82,46	0	82,46	
j=1002	282,84	282,84	107,70	107,70	374,43	478,54	41,23	352,28	190,26	373,36	186,82	106,30	121,66	474,34	82,46	0	82,46	0	82,46	0	82,46	0	
j=1011	250,60	250,60	189,74	189,74	325,27	418,81	123,69	304,14	110,45	425,44	238,54	90,00	200,00	424,50	0	82,46	0	82,46	0	82,46	0	82,46	
j=1012	282,84	282,84	107,70	107,70	374,43	478,54	41,23	352,28	190,26	373,36	186,82	106,30	121,66	474,34	82,46	0	82,46	0	82,46	0	82,46	0	
j=1021	250,60	250,60	189,74	189,74	325,27	418,81	123,69	304,14	110,45	425,44	238,54	90,00	200,00	424,50	0	82,46	0	82,46	0	82,46	0	82,46	
j=1022	282,84	282,84	107,70	107,70	374,43	478,54	41,23	352,28	190,26	373,36	186,82	106,30	121,66	474,34	82,46	0	82,46	0	82,46	0	82,46	0	
j=1031	250,60	250,60	189,74	189,74	325,27	418,81	123,69	304,14	110,45	425,44	238,54	90,00	200,00	424,50	0	82,46	0	82,46	0	82,46	0	82,46	
j=1032	282,84	282,84	107,70	107,70	374,43	478,54	41,23	352,28	190,26	373,36	186,82	106,30	121,66	474,34	82,46	0	82,46	0	82,46	0	82,46	0	

Πίνακας 5.1.6c: Τιμές b_{ij}^k (μονάδες κόστους) , για το σενάριο δρομολόγησης c

		Σενάριο: c																					
j	i=11	i=21	i=12	i=22	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10	i=1001	i=1002	i=1011	i=1012	i=1021	i=1022	i=1031	i=1032	
j=11	0	480,21	480,21	470,74	152,97	388,97	477,07	382,10	412,31	262,49	264,76	388,97	545,89	512,64	322,49	512,64	322,49	512,64	322,49	512,64	322,49	512,64	322,49
j=21	0,00	480,208	480,21	470,74	152,97	388,97	477,07	382,10	412,31	262,49	264,76	388,97	545,89	512,64	322,49	512,64	322,49	512,64	322,49	512,64	322,49	512,64	322,49
j=12	480,21	0,00	0	158,114	340,59	131,53	510,10	212,13	94,87	366,74	250,00	131,53	354,68	435,66	158,11	435,66	158,11	435,66	158,11	435,66	158,11	435,66	158,11
j=22	480,21	0,00	0,00	158,114	340,59	131,53	510,10	212,13	94,87	366,74	250,00	131,53	354,68	435,66	158,11	435,66	158,11	435,66	158,11	435,66	158,11	435,66	158,11
j=1	305,94	353,55	353,55	447,21	284,605	150,10	510,10	412,31	349,28	424,85	320,16	222,04	612,21	637,81	260,77	637,81	260,77	637,81	260,77	637,81	260,77	637,81	260,77
j=2	243,31	614,00	614,00	540,37	291,55	563,649	360,56	440,45	524,98	264,01	364,01	563,65	524,98	444,07	466,48	444,07	466,48	444,07	466,48	444,07	466,48	444,07	
j=3	145,60	396,23	396,23	349,28	70,71	340,15	340,588	252,98	312,41	117,05	150,00	340,15	402,00	367,70	244,13	367,70	244,13	367,70	244,13	367,70	244,13	367,70	244,13
j=4	460,65	460,00	460,00	314,01	353,84	497,29	509,99	251,794	371,21	206,16	300,17	497,29	183,85	76,16	392,17	76,16	392,17	76,16	392,17	76,16	392,17	76,16	
j=5	180,00	339,71	339,71	297,32	42,43	287,92	340,59	203,96	256,125	106,30	94,34	287,92	368,78	349,86	188,68	349,86	188,68	349,86	188,68	349,86	188,68	349,86	188,68
j=6	120,42	362,35	362,35	370,54	78,10	268,70	460,11	292,75	300,83	226,274	172,63	268,70	477,60	468,72	206,16	468,72	206,16	468,72	206,16	468,72	206,16	468,72	206,16
j=7	519,71	364,01	364,01	206,16	382,75	435,66	194,16	191,05	290,69	260,77	291,548	435,66	36,06	85,44	347,13	85,44	347,13	85,44	347,13	85,44	347,13	85,44	
j=8	170,29	339,41	339,41	303,64	28,28	282,31	354,68	212,13	258,07	120,42	98,49	282,312	380,79	363,59	186,01	363,59	186,01	363,59	186,01	363,59	186,01	363,59	186,01
j=9	246,98	233,24	233,24	251,79	116,62	156,52	433,82	192,35	172,63	213,78	94,34	156,52	391,152	411,10	76,16	411,10	76,16	411,10	76,16	411,10	76,16	411,10	76,16
j=10	70,71	416,17	416,17	400,25	82,46	334,22	426,38	311,45	344,38	201,25	194,16	334,22	478,54	451,885	258,07	451,88	258,07	451,88	258,07	451,88	258,07	451,88	258,07
j=1001	512,64	435,66	435,66	280,71	391,15	492,44	113,14	241,66	354,40	250,80	318,28	492,44	116,62	0,00	394,462	0,00	394,46	0,00	394,46	0,00	394,46	0,00	394,46
j=1002	322,49	158,11	158,11	189,74	183,85	110,00	436,81	156,20	100,00	241,87	111,80	110,00	353,84	394,46	0,00	394,462	0,00	394,46	0,00	394,46	0,00	394,46	0,00
j=1011	512,64	435,66	435,66	280,71	391,15	492,44	113,14	241,66	354,40	250,80	318,28	492,44	116,62	0,00	394,46	0,00	394,46	0,00	394,46	0,00	394,46	0,00	394,46
j=1012	322,49	158,11	158,11	189,74	183,85	110,00	436,81	156,20	100,00	241,87	111,80	110,00	353,84	394,46	0,00	394,46	0,00	394,46	0,00	394,46	0,00	394,46	0,00
j=1021	512,64	435,66	435,66	280,71	391,15	492,44	113,14	241,66	354,40	250,80	318,28	492,44	116,62	0,00	394,46	0,00	394,46	0,00	394,46	0,00	394,46	0,00	394,46
j=1022	322,49	158,11	158,11	189,74	183,85	110,00	436,81	156,20	100,00	241,87	111,80	110,00	353,84	394,46	0,00	394,46	0,00	394,46	0,00	394,46	0,00	394,46	0,00
j=1031	512,64	435,66	435,66	280,71	391,15	492,44	113,14	241,66	354,40	250,80	318,28	492,44	116,62	0,00	394,46	0,00	394,46	0,00	394,46	0,00	394,46	0,00	394,46
j=1032	322,49	158,11	158,11	189,74	183,85	110,00	436,81	156,20	100,00	241,87	111,80	110,00	353,84	394,46	0,00	394,46	0,00	394,46	0,00	394,46	0,00	394,46	0,00

Πίνακας 5.1.6d: Τιμές b_{ij}^k (μονάδες κόστους) , για το σενάριο δρομολόγησης d

		Σενάριο: d																				
j	i=11	i=21	i=12	i=22	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10	i=1001	i=1002	i=1011	i=1012	i=1021	i=1022	i=1031	i=1032
j=11	0	0,00	636,40	636,40	410,00	274,59	601,0															

του υπολογισμού των τιμών θ_{ij} , για κάθε σενάριο, παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες 5.1.7α, 5.1.7β, 5.1.7c και 5.1.7d αντίστοιχα.

Πίνακας 5.1.7α: Τιμές θ_{ij} (μονάδες ενέργειας), για το σενάριο δρομολόγησης α

Σενάριο: α																								
j	i=11	i=21	i=12	i=22	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10	i=1001	i=1002	i=1011	i=1012	i=1021	i=1022	i=1031	i=1032		
j=11	0	0,00	73,64	73,64	84,59	90,53	66,29	51,11	10,48	53,49	29,47	26,00	32,60	65,74	71,12	53,32	71,12	53,32	71,12	53,32	71,12	53,32	71,12	53,32
j=21	0,00	0	73,64	73,64	84,59	90,53	66,29	51,11	10,48	53,49	29,47	26,00	32,60	65,74	71,12	53,32	71,12	53,32	71,12	53,32	71,12	53,32	71,12	53,32
j=12	73,64	73,64	0	0,00	33,42	26,51	13,57	67,11	63,31	50,58	49,55	50,16	56,04	9,19	47,84	29,21	47,84	29,21	47,84	29,21	47,84	29,21	47,84	29,21
j=22	73,64	73,64	0,00	0	33,42	26,51	13,57	67,11	63,31	50,58	49,55	50,16	56,04	9,19	47,84	29,21	47,84	29,21	47,84	29,21	47,84	29,21	47,84	29,21
j=1	87,65	87,65	49,00	49,00	0	30,46	60,22	48,85	78,27	35,96	58,43	75,65	56,14	45,13	17,68	70,25	17,68	70,25	17,68	70,25	17,68	70,25	17,68	70,25
j=2	45,52	45,52	70,36	70,36	61,20	0	71,51	7,35	41,05	22,25	29,64	51,77	19,50	61,27	38,41	68,25	38,41	68,25	38,41	68,25	38,41	68,25	38,41	68,25
j=3	70,21	70,21	24,73	24,73	57,92	50,85	0	80,61	61,22	66,19	54,80	44,22	63,95	28,00	68,69	16,90	68,69	16,90	68,69	16,90	68,69	16,90	68,69	16,90
j=4	33,14	33,14	54,74	54,74	54,85	63,75	53,44	0	25,24	20,35	9,37	32,11	1,30	45,57	38,23	48,36	38,23	48,36	38,23	48,36	38,23	48,36	38,23	48,36
j=5	59,98	59,98	46,87	46,87	31,87	44,20	52,47	23,44	0	7,58	31,66	52,15	27,82	38,78	11,18	55,84	11,18	55,84	11,18	55,84	11,18	55,84	11,18	55,84
j=6	80,11	80,11	37,23	37,23	7,91	22,21	48,24	47,68	70,25	0	50,63	65,74	50,18	33,14	16,95	58,50	16,95	58,50	16,95	58,50	16,95	58,50	16,95	58,50
j=7	41,92	41,92	34,32	34,32	56,76	56,98	24,67	57,47	32,50	46,60	0	16,44	37,79	28,63	56,14	12,33	56,14	12,33	56,14	12,33	56,14	12,33	56,14	12,33
j=8	70,46	70,46	21,32	21,32	16,44	20,35	31,25	50,01	60,10	32,91	41,92	0	44,83	16,08	26,67	41,68	26,67	41,68	26,67	41,68	26,67	41,68	26,67	41,68
j=9	68,12	68,12	34,02	34,02	17,44	28,63	42,44	39,00	58,27	22,25	38,65	54,32	0	27,42	13,82	50,01	13,82	50,01	13,82	50,01	13,82	50,01	13,82	50,01
j=10	36,61	36,61	37,23	37,23	54,68	57,02	30,01	49,42	26,51	39,47	19,50	13,82	29,47	0	50,72	20,35	50,72	20,35	50,72	20,35	50,72	20,35	50,72	20,35
j=1001	71,12	71,12	47,84	47,84	24,84	38,78	55,96	31,66	62,21	18,38	42,50	61,98	39,00	41,11	0	62,14	0,00	62,14	0,00	62,14	0,00	62,14	0,00	62,14
j=1002	53,32	53,32	29,21	29,21	57,73	54,80	16,55	68,05	44,37	55,54	39,69	27,33	49,42	26,80	62,14	0	62,14	0,00	62,14	0,00	62,14	0,00	62,14	0,00
j=1011	71,12	71,12	47,84	47,84	24,84	38,78	55,96	31,66	62,21	18,38	42,50	61,98	39,00	41,11	0,00	62,14	0	62,14	0,00	62,14	0,00	62,14	0,00	62,14
j=1012	53,32	53,32	29,21	29,21	57,73	54,80	16,55	68,05	44,37	55,54	39,69	27,33	49,42	26,80	62,14	0,00	62,14	0	62,14	0,00	62,14	0,00	62,14	0,00
j=1021	71,12	71,12	47,84	47,84	24,84	38,78	55,96	31,66	62,21	18,38	42,50	61,98	39,00	41,11	0,00	62,14	0,00	62,14	0	62,14	0,00	62,14	0,00	62,14
j=1022	53,32	53,32	29,21	29,21	57,73	54,80	16,55	68,05	44,37	55,54	39,69	27,33	49,42	26,80	62,14	0,00	62,14	0,00	62,14	0,00	62,14	0,00	62,14	0,00
j=1031	71,12	71,12	47,84	47,84	24,84	38,78	55,96	31,66	62,21	18,38	42,50	61,98	39,00	41,11	0,00	62,14	0,00	62,14	0,00	62,14	0,00	62,14	0,00	62,14
j=1032	53,32	53,32	29,21	29,21	57,73	54,80	16,55	68,05	44,37	55,54	39,69	27,33	49,42	26,80	62,14	0,00	62,14	0,00	62,14	0,00	62,14	0,00	62,14	0,00

Πίνακας 5.1.7β: Τιμές θ_{ij} (μονάδες ενέργειας), για το σενάριο δρομολόγησης β

Σενάριο: β																								
j	i=11	i=21	i=12	i=22	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10	i=1001	i=1002	i=1011	i=1012	i=1021	i=1022	i=1031	i=1032		
j=11	0	0,00	44,20	44,20	14,36	29,93	39,79	11,70	27,33	47,12	32,60	23,00	50,48	26,32	32,58	36,77	32,58	36,77	32,58	36,77	32,58	36,77	32,58	36,77
j=21	0,00	0	44,20	44,20	14,36	29,93	39,79	11,70	27,33	47,12	32,60	23,00	50,48	26,32	32,58	36,77	32,58	36,77	32,58	36,77	32,58	36,77	32,58	36,77
j=12	44,20	44,20	0	0,00	57,70	72,36	8,72	54,80	38,26	40,49	19,33	23,72	8,22	70,37	24,67	14,00	24,67	14,00	24,67	14,00	24,67	14,00	24,67	14,00
j=22	44,20	44,20	0,00	0	57,70	72,36	8,72	54,80	38,26	40,49	19,33	23,72	8,22	70,37	24,67	14,00	24,67	14,00	24,67	14,00	24,67	14,00	24,67	14,00
j=1	5,36	5,36	40,80	40,80	0	31,87	35,70	14,00	22,10	48,38	31,31	18,48	46,60	29,67	27,42	32,29	27,42	32,29	27,42	32,29	27,42	32,29	27,42	32,29
j=2	18,06	18,06	48,38	48,38	17,68	0	41,31	15,82	15,65	62,74	43,58	24,73	52,34	29,21	27,91	36,61	27,91	36,61	27,91	36,61	27,91	36,61	27,91	36,61
j=3	43,21	43,21	16,08	16,08	57,57	73,09	0	54,85	47,11	24,70	10,72	29,70	23,44	69,10	35,96	26,80	35,96	26,80	35,96	26,80	35,96	26,80	35,96	26,80
j=4	14,53	14,53	53,93	53,93	7,91	18,61	47,80	0	25,24	61,65	45,67	30,43	58,90	19,50	36,14	43,60	36,14	43,60	36,14	43,60	36,14	43,60	36,14	43,60
j=5	22,14	22,14	25,80	25,80	36,49	52,06	25,11	33,82	0	29,42	10,48	16,90	33,55	47,94	28,06	25,01	28,06	25,01	28,06	25,01	28,06	25,01	28,06	25,01
j=6	14,53	14,53	56,32	56,32	3,90	16,08	50,58	3,68	29,21	0	46,80	33,14	61,65	15,65	39,62	46,60	39,62	46,60	39,62	46,60	39,62	46,60	39,62	46,60
j=7	12,33	12,33	32,11	32,11	26,51	41,92	28,51	23,72	25,61	39,00	0	13,57	38,78	38,65	25,01	26,32	25,01	26,32	25,01	26,32	25,01	26,32	25,01	26,32
j=8	28,39	28,39	17,49	17,49	42,58	57,92	17,34	39,77	32,50	31,44	7,35	0	25,24	54,68	23,86	18,25	23,86	18,25	23,86	18,25	23,86	18,25	23,86	18,25
j=9	47,68	47,68	39,62	39,62	53,49	61,92	31,25	51,21	21,00	74,42	50,01	30,60	0	65,32	19,33	26,80	19,33	26,80	19,33	26,80	19,33	26,80	19,33	26,80
j=10	13,57	13,57	35,96	35,96	23,15	36,70	29,70	20,31	14,53	50,77	30,43	12,33	40,80	0	19,50	25,64	19,50	25,64	19,50	25,64	19,50	25,64	19,50	25,64
j=1001	32,58	32,58	24,67	24,67	42,28	54,45	16,08	39,54	14,36	55,31	31,01	11,70	26,00	55,18	0	10,72	0,00	10,72	0,00	10,72	0,00	10,72	0,00	10,72
j=1002	36,77	36,77	14,00	14,00	48,68	62,21	5,36	45,80	24,73	48,54	24,29	13,82	15,82	61,66	10,72	0	10,72	0,00	10,72	0,00	10,72	0,00	10,72	0,00
j=1011	32,58	32,58	24,67	24,67	42,28	54,45	16,08	39,54	14,36	55,31	31,01	11,70	26,00	55,18	0,00	10,72	0	10,72	0,00	10,72	0,00	10,72	0,00	10,72
j=1012	36,77	36,77	14,00	14,00	48,68	62,21	5,36	45,80	24,73	48,54	24,29	13,82	15,82	61,66	10,72	0,00	10,72	0	10,72	0,00	10,72	0,00	10,72	0,00
j=1021	32,58	32,58	24,67	24,67	42,28	54,45	16,08	39,54	14,36	55,31	31,01	11,70	26,00	55,18	0,00	10,72	0,00	10,72	0	10,72	0,00	10,72	0,00	10,72
j=1022	36,77	36,77	14,00	14,00	48,68	62,21	5,36	45,80	24,73	48,54	24,29	13,82	15,82	61,66	10,72	0,00	10,72	0,00	10,72	0,00	10,72	0,00	10,72	0,00
j=1031	32,58	32,58	24,67	24,67	42,28	54,45	16,08	39,54	14,36	55,31	31,01	11,70	26,00	55,18	0,00	10,72	0,00	10,72	0,00	10,72	0,00	10,72	0,00	10,72
j=1032	36,77	36,77	14,00	14,00	48,68	62,21	5,36	45,80	24,73	48,54	24,29	13,82	15,82	61,66	10,72	0,00	10,72	0,00	10,72	0,00	10,72	0,00	10,72	0,00

Πίνακας 5.1.7c: Τιμές θ_{ij} (μονάδες ενέργειας), για το σενάριο δρομολόγησης c

		Σενάριο: c																					
j	i=11	i=21	i=12	i=22	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10	i=1001	i=1002	i=1011	i=1012	i=1021	i=1022	i=1031	i=1032	
j=11	0	0,00	62,43	62,43	61,20	19,89	50,57	62,02	49,67	53,60	34,12	34,42	50,57	70,97	66,64	41,92	66,64	41,92	66,64	41,92	66,64	41,92	66,64
j=21	0,00	0	62,43	62,43	61,20	19,89	50,57	62,02	49,67	53,60	34,12	34,42	50,57	70,97	66,64	41,92	66,64	41,92	66,64	41,92	66,64	41,92	66,64
j=12	62,43	62,43	0	0,00	20,55	44,28	17,10	66,31	27,58	12,33	47,68	32,50	17,10	46,11	56,64	20,55	56,64	20,55	56,64	20,55	56,64	20,55	56,64
j=22	62,43	62,43	0,00	0	20,55	44,28	17,10	66,31	27,58	12,33	47,68	32,50	17,10	46,11	56,64	20,55	56,64	20,55	56,64	20,55	56,64	20,55	56,64
j=1	39,77	39,77	45,96	45,96	0	37,00	28,86	85,17	53,60	45,41	55,23	41,62	28,86	79,59	82,92	33,90	82,92	33,90	82,92	33,90	82,92	33,90	82,92
j=2	31,63	31,63	79,82	79,82	70,25	0	73,27	46,87	57,26	68,25	34,32	47,32	73,27	68,25	57,73	60,64	57,73	60,64	57,73	60,64	57,73	60,64	57,73
j=3	18,93	18,93	51,51	51,51	45,41	9,19	0	44,28	32,89	40,61	15,22	19,50	44,22	52,26	47,80	31,74	47,80	31,74	47,80	31,74	47,80	31,74	47,80
j=4	59,88	59,88	59,80	59,80	40,82	46,00	64,65	0	32,73	48,26	26,80	39,02	64,65	23,90	9,90	50,98	9,90	50,98	9,90	50,98	9,90	50,98	9,90
j=5	23,40	23,40	44,16	44,16	38,65	5,52	37,43	44,28	0	33,30	13,82	12,26	37,43	47,94	45,48	24,53	45,48	24,53	45,48	24,53	45,48	24,53	45,48
j=6	15,65	15,65	47,11	47,11	48,17	10,15	34,93	59,81	38,06	0	29,42	22,44	34,93	62,09	60,93	26,80	60,93	26,80	60,93	26,80	60,93	26,80	60,93
j=7	67,56	67,56	47,32	47,32	26,80	49,76	56,64	25,24	24,84	37,79	0	37,90	56,64	4,69	11,11	45,13	11,11	45,13	11,11	45,13	11,11	45,13	11,11
j=8	22,14	22,14	44,12	44,12	39,47	3,68	36,70	46,11	27,58	33,55	15,65	0	36,70	49,50	47,27	24,18	47,27	24,18	47,27	24,18	47,27	24,18	47,27
j=9	32,11	32,11	30,32	30,32	32,73	15,16	20,35	56,40	25,01	22,44	27,79	12,26	0	50,85	53,44	9,90	53,44	9,90	53,44	9,90	53,44	9,90	53,44
j=10	9,19	9,19	54,10	54,10	52,03	10,72	43,45	55,43	40,49	44,77	26,16	25,24	43,45	0	58,75	33,55	58,75	33,55	58,75	33,55	58,75	33,55	58,75
j=1001	66,64	66,64	56,64	56,64	36,49	50,85	64,02	14,71	31,42	46,07	32,60	41,38	64,02	15,16	0	51,28	0,00	51,28	0,00	51,28	0,00	51,28	0,00
j=1002	41,92	41,92	20,55	20,55	24,67	23,90	14,30	56,78	20,31	13,00	31,44	14,53	14,30	46,00	51,28	0	51,28	0,00	51,28	0,00	51,28	0,00	51,28
j=1011	66,64	66,64	56,64	56,64	36,49	50,85	64,02	14,71	31,42	46,07	32,60	41,38	64,02	15,16	0,00	51,28	0	51,28	0,00	51,28	0,00	51,28	0,00
j=1012	41,92	41,92	20,55	20,55	24,67	23,90	14,30	56,78	20,31	13,00	31,44	14,53	14,30	46,00	51,28	0,00	51,28	0,00	51,28	0,00	51,28	0,00	51,28
j=1021	66,64	66,64	56,64	56,64	36,49	50,85	64,02	14,71	31,42	46,07	32,60	41,38	64,02	15,16	0,00	51,28	0,00	51,28	0,00	51,28	0,00	51,28	0,00
j=1022	41,92	41,92	20,55	20,55	24,67	23,90	14,30	56,78	20,31	13,00	31,44	14,53	14,30	46,00	51,28	0,00	51,28	0,00	51,28	0,00	51,28	0,00	51,28
j=1031	66,64	66,64	56,64	56,64	36,49	50,85	64,02	14,71	31,42	46,07	32,60	41,38	64,02	15,16	0,00	51,28	0,00	51,28	0,00	51,28	0,00	51,28	0,00
j=1032	41,92	41,92	20,55	20,55	24,67	23,90	14,30	56,78	20,31	13,00	31,44	14,53	14,30	46,00	51,28	0,00	51,28	0,00	51,28	0,00	51,28	0,00	51,28

Πίνακας 5.1.7d: Τιμές θ_{ij} (μονάδες ενέργειας), για το σενάριο δρομολόγησης d

		Σενάριο: d																					
j	i=11	i=21	i=12	i=22	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10	i=1001	i=1002	i=1011	i=1012	i=1021	i=1022	i=1031	i=1032	
j=11	0	0,00	82,73	82,73	53,30	35,70	78,14	40,38	26,51	52,93	49,55	54,85	84,59	40,45	52,40	35,70	52,40	35,70	52,40	35,70	52,40	35,70	52,40
j=21	0,00	0	82,73	82,73	53,30	35,70	78,14	40,38	26,51	52,93	49,55	54,85	84,59	40,45	52,40	35,70	52,40	35,70	52,40	35,70	52,40	35,70	52,40
j=12	82,73	82,73	0	0,00	47,25	48,36	4,69	58,79	71,51	37,86	55,35	53,44	2,60	42,28	52,40	57,02	52,40	57,02	52,40	57,02	52,40	57,02	52,40
j=22	82,73	82,73	0,00	0	47,25	48,36	4,69	58,79	71,51	37,86	55,35	53,44	2,60	42,28	52,40	57,02	52,40	57,02	52,40	57,02	52,40	57,02	52,40
j=1	57,26	57,26	61,11	61,11	0	49,77	58,56	69,44	31,31	26,32	10,15	8,22	63,71	42,32	74,51	23,90	74,51	23,90	74,51	23,90	74,51	23,90	74,51
j=2	77,23	77,23	13,57	13,57	35,36	0	11,18	48,26	70,36	40,38	58,63	57,92	13,06	37,79	40,36	56,86	40,36	56,86	40,36	56,86	40,36	56,86	
j=3	44,88	44,88	52,68	52,68	54,86	33,14	0	52,79	22,37	14,82	6,50	10,72	55,18	26,00	58,09	9,19	58,09	9,19	58,09	9,19	58,09	9,19	58,09
j=4	61,80	61,80	42,92	42,92	60,32	42,76	40,63	0	39,69	13,38	15,65	11,63	45,52	33,80	64,54	26,32	64,54	26,32	64,54	26,32	64,54	26,32	64,54
j=5	48,12	48,12	58,14	58,14	62,41	40,45	54,99	59,93	0	20,80	2,91	7,58	60,70	33,55	65,58	14,00	65,58	14,00	65,58	14,00	65,58	14,00	65,58
j=6	61,92	61,92	22,10	22,10	27,58	26,67	17,44	37,23	54,86	0	45,41	45,65	23,44	22,10	32,73	41,78	32,73	41,78	32,73	41,78	32,73	41,78	
j=7	45,67	45,67	63,74	63,74	65,32	42,64	60,49	61,60	19,54	26,13	0	12,87	66,29	36,63	68,16	14,71	68,16	14,71	68,16	14,71	68,16	14,71	
j=8	28,63	28,63	54,31	54,31	30,60	7,91	49,67	23,97	28,39	29,90	36,12	0	56,08	12,26	32,11	23,00	32,11	23,00	32,11	23,00	32,11	23,00	
j=9	23,97	23,97	58,86	58,86	34,02	12,33	54,24	25,64	25,61	32,73	36,70	41,11	0	16,65	35,00	22,74	35,00	22,74	35,00	22,74	35,00	22,74	
j=10	51,76	51,76	48,73	48,73	1,84	22,70	44,50	13,00	58,04	47,32	60,92	63,43	49,21	0	4,11	50,63	4,11	50,63	4,11	50,63	4,11	50,63	
j=1001	52,40	52,40	52,40	52,40	5,20	25,64	48,26	12,33	60,43	51,23	64,45	19,54	51,29	32,19	0	53,74	0,00	53,74	0,00	53,74	0,00	53,74	
j=1002	35,70	35,70	57,02	57,02	51,16	28,12	53,11	46,89	14,82	20,31	14,53	19,54	59,40	23,04	53,74	0	53,74	0,00	53,74	0,00	53,74	0,00	
j=1011	52,40	52,40	52,40	52,40	5,20	25,64	48,26	12,33	60,43	51,23	64,45	19,54	51,29	32,19	0,00	53,74	0	53,74	0,00	53,74	0,00	53,74	
j=1012	35,70	35,70	57,02	57,02	51,16	28,12	53,11	46,89	14,82	20,31	14,53	19,54	59,40	23,04	53,74	0,00	53,74	0,00	53,74	0,00	53,74	0,00	
j=1021	52,40	52,40	52,40	52,40	5,20	25,64	48,26	12,33	60,43	51,23	64,45	19,54	51,29	32,19	0,00	53,74	0,00	53,74	0,00	53,74	0,00	53,74	
j=1022	35,70	35,70	57,02	57,02	51,16	28,12	53,11	46,89	14,82	20,31	14,53	19,54	59,40	23,04	53,74	0,00	53,74	0,00	53,74	0,00	53,74	0,00	
j=1031	52,40	52,40	52,40	52,40	5,20	25,64	48,26	12,33	60,43	51,23	64,45	19,54	51,29	32,19	0,00	53,74	0,00	53,74	0,00	53,74	0,00	53,74	
j=1032	35,70	35,70	57,02	57,02	51,16	28,12	53,11	46,89	14,82	20,31	14,53	19,54	59,40	23,04	53,74	0,00	53,74	0,00	53,74	0,00	53,74	0,00	

Οι τιμές του διανύσματος q_j , που δηλώνουν ένα γεγονός φόρτισης $q_j \in F$ το οποίο ανήκει στον σταθμό φόρτισης, που είναι πλησιέστερος στην θέση τερματισμού του κόμβου υπηρεσίας $j \in V$, παρουσιάζονται παρακάτω, για κάθε σενάριο, στον πίνακα 5.1.8.

Πίνακας 5.1.8: Τιμές q_j , για κάθε σενάριο δρομολόγησης

Σενάριο	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8	j=9	j=10
a	1031	1031	1032	1031	1032	1031	1032	1032	1031	1032
b	1031	1031	1032	1031	1031	1032	1032	1031	1032	1031
c	1032	1032	1032	1031	1032	1032	1032	1032	1032	1031
d	1031	1031	1031	1031	1032	1032	1032	1032	1031	1032

Μέθοδος επίλυσης

Καθένα από τα 4 σενάρια λύνεται με τρεις διαφορετικές μεθόδους:

- Με $|S| = 1$ περιπτώσεις χρόνων διαδρομής υπηρεσίας (αντίστοιχη με την αρχική εργασία)

- Με $|S| = 100$ περιπτώσεις χρόνων διαδρομής
- Με $|S| = 100$ περιπτώσεις χρόνων διαδρομής και περιορισμό πιθανότητας, όπου $\alpha = 80\%$

Σε κάθε περίπτωση, το μοντέλο επιλύεται με το λογισμικό επίλυσης Gurobi 11.0.0, με τη μοντελοποίηση του δικτύου να υλοποιείται σε προγράμματα Python 3. Συγκεκριμένα η πρώτη μέθοδος υλοποιείται με το πρόγραμμα «EB-MDVSPTW_Vlady_single_scenario.py», η δεύτερη με το πρόγραμμα EB-MDVSPTW_Vlady.py» και η τρίτη με το πρόγραμμα «EB-MDVSPTW_Vlady_Chance_Constraint.py». Παρατίθεται ενδεικτικά ο κώδικας του τελευταίου προγράμματος στο απόσπασμα κώδικα 2.3. Ο υπολογιστής στον οποίο εκτελείται η επίλυση διαθέτει 16 GB μνήμης RAM και επεξεργαστή Intel Core i5-1135G7, με 4 πυρήνες και 8 λογικούς επεξεργαστές, ο οποίος κατά την επίλυση λειτουργεί σε συχνότητες μεταξύ 3,9 και 4,1 GHz.

5.2 Αποτελέσματα αριθμητικού παραδείγματος

Πίνακας 5.2.1: Επιχειρησιακό κόστος, ανά σενάριο δρομολόγησης και ανά μέθοδο επίλυσης (μονάδες κόστους)

Επιχειρησιακό Κόστος (Αντικειμενική τιμή συνάρτησης)			
Σενάριο	S = 1	S = 100	S = 100
Δρομολόγησης		$\alpha = 100\%$	$\alpha = 80\%$
D2_S2_C10_a	1909	2847	2330
D2_S2_C10_b	1478	2444	1925
D2_S2_C10_c	2286	3348	2752
D2_S2_C10_d	1505	2633	1995

Παρατηρείται πως τα σενάρια δρομολόγησης, τα οποία έχουν επιλυθεί με πολλαπλές περιπτώσεις χρόνων διαδρομής υπηρεσίας, ενέχουν υψηλότερο επιχειρησιακό κόστος. Αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς στις πολλαπλές περιπτώσεις χρόνων διαδρομών εμφανίζονται ακραίες περιπτώσεις. Συνεπώς, για να είναι εφικτός ο προγραμματισμός δρομολόγησης σε αυτές τις περιπτώσεις, η δρομολόγηση απαιτείται να διαθέτει μεγάλα χρονικά περιθώρια, οπότε και το επιχειρησιακό κόστος αυξάνει αναλόγως. Συγκεκριμένα, όταν τηρούνται πιστά όλοι οι περιορισμοί, η αύξηση του επιχειρησιακού κόστους κυμαίνεται μεταξύ 49% και 75%. Με τους περιορισμούς πιθανότητας, όπου γίνεται αποδεκτό πως για το δυσμενέστερο 20% των περιπτώσεων κάθε διαδρομής υπηρεσίας, η εκκίνηση της επόμενης διαδρομής υπηρεσίας μπορεί να καθυστερήσει, η αύξηση του επιχειρησιακού κόστους είναι ηπιότερη και κυμαίνεται μεταξύ 20% και 33%.

Πίνακας 5.2.2: Χρόνος επίλυσης, ανά σενάριο δρομολόγησης και ανά μέθοδο επίλυσης (s)

Χρόνος Επίλυσης (s)			
Σενάριο	S = 1	S = 100	S = 100
Δρομολόγησης		$\alpha = 100\%$	$\alpha = 80\%$
D2_S2_C10_a	129	22 088	19 916
D2_S2_C10_b	87	21 486	21 983
D2_S2_C10_c	145	22 640	24 686
D2_S2_C10_d	190	28 992	27 776

Για 100 περιπτώσεις χρόνων διαδρομής υπηρεσίας, ο χρόνος επίλυσης είναι περίπου 150 με 250 φορές μεγαλύτερος, από την μέθοδο επίλυσης που δεν λαμβάνει υπόψιν στοχαστικούς χρόνους διαδρομής. Η χρήση περιορισμών πιθανότητας δεν συνεισφέρει απαραίτητα σε κάποια μεταβολή των χρόνων επίλυσης.

5.3 Ανάλυση Ευαισθησίας με βάση την τυπική απόκλιση των χρόνων διαδρομής υπηρεσίας

Σε αυτή την υποενότητα, σκοπός είναι η διερεύνηση της μεταβολής του επιχειρησιακού κόστους, ενός προγράμματος δρομολόγησης, κάποιου σεναρίου δρομολόγησης, κατά τη μεταβολή της τυπικής απόκλισης του χρόνου διαδρομών υπηρεσιών ξ_i .

Ως εκ τούτου, υπολογίζονται προσομοιώσεις Monte Carlo του επιχειρησιακού κόστους, σύμφωνα με την μαθηματική σχέση:

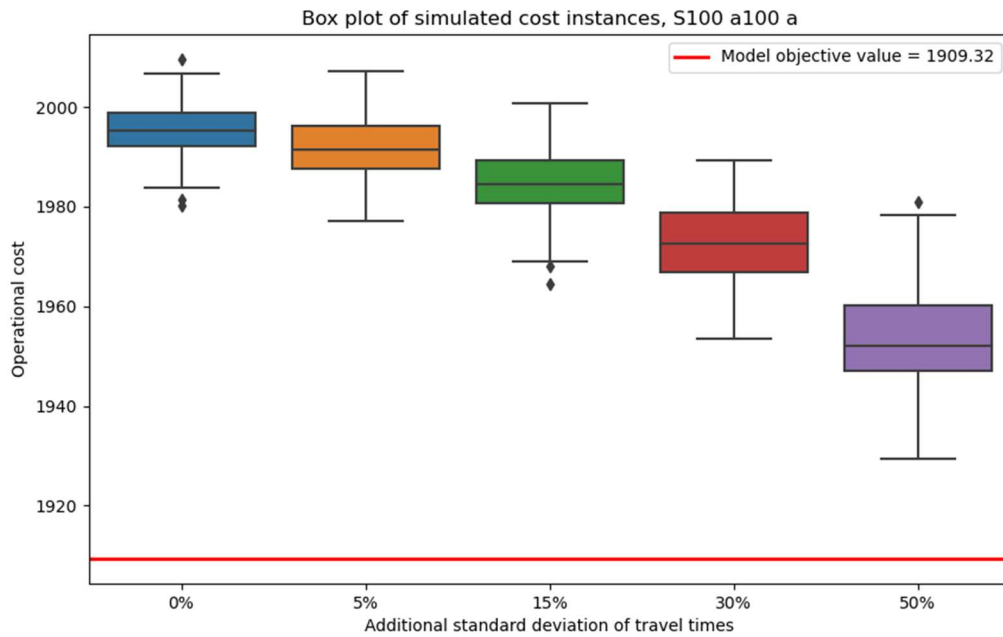
$$\begin{aligned} & \frac{1}{|S|} \left(\sum_{s \in S} \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A_k | i \in V^k} \left(b_{ij}^k + \lambda(T_j^k - T_i^k - \tilde{\tau}_i^s - t_{ij}) \right) x_{ij}^k \right. \\ & \quad + \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A_k | i \in F} \left(b_{ij}^k + \lambda(T_j^k - T_i^k - \tau_i^k - t_{ij}) \right) x_{ij}^k \\ & \quad \left. + \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A_k | i = o_k} \left(b_{ij}^k + \lambda(T_j^k - T_i^k - t_{ij}) \right) x_{ij}^k \right) \end{aligned}$$

Συγκεκριμένα, για κάθε πρόγραμμα δρομολόγησης, το οποίο υπολογίστηκε λαμβάνοντας υπόψιν στοχαστικούς χρόνους διαδρομών υπηρεσίας, υπολογίζονται 200 προσομοιώσεις, για 0%, 5%, 15%, 30% & 50% αύξηση των τυπικών αποκλίσεων των φυσικών λογαρίθμων των χρόνων διαδρομής υπηρεσίας.

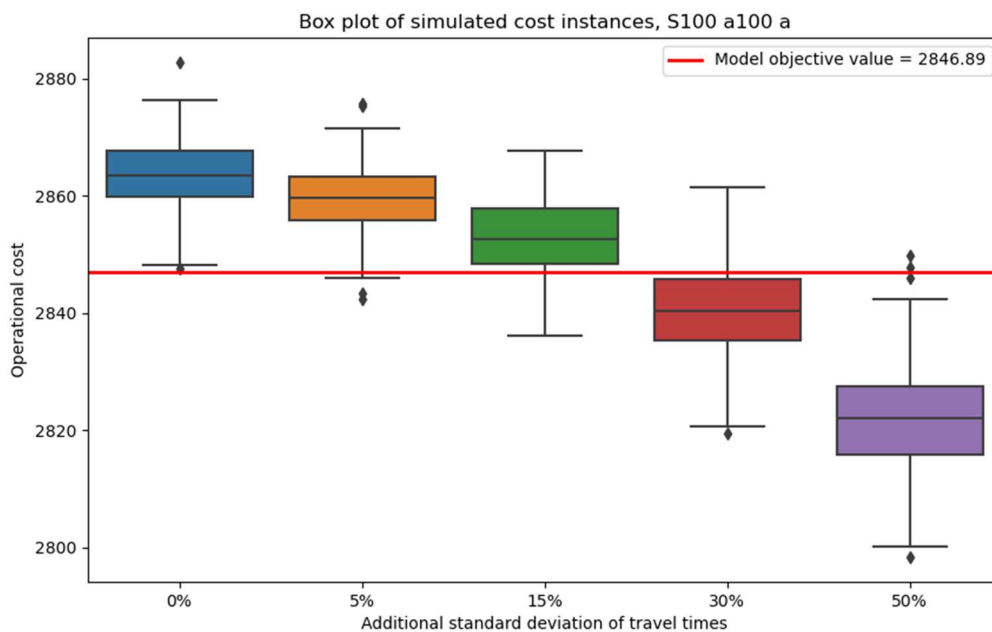
Σε κάθε προσομοίωση, υπολογίζονται 100 ενδεχόμενα χρονών διαδρομής υπηρεσίας, για κάθε κόμβο υπηρεσίας. Η μέση τιμή της κανονικής κατανομής των φυσικών λογαρίθμων των χρόνων διαδρομής είναι η ίδια με την αντίστοιχη του αριθμητικού παραδείγματος, ενώ η τυπική απόκλιση λαμβάνει την αντίστοιχη προσαύξηση. Η τιμή seed, είναι τυχαία για κάθε προσομοίωση. Οι τιμές των παραμέτρων b_{ij}^k , λ & t_{ij} , είναι ίδιες με αυτές του αριθμητικού παραδείγματος, για κάθε πρόγραμμα δρομολόγησης, ενώ για τις παραμέτρους T_i^k , τ_i^k & x_{ij}^k χρησιμοποιούνται οι τιμές των μεταβλητών απόφασης, από τα αποτελέσματα του αντίστοιχου υπολογισμού προγράμματος δρομολόγησης.

Οι προσομοιώσεις υλοποιούνται με το πρόγραμμα «trip_instance_simulator.py». Ο κώδικας του προγράμματος παρατίθεται στο [απόσπασμα κώδικα 2.5](#) του παραρτήματος.

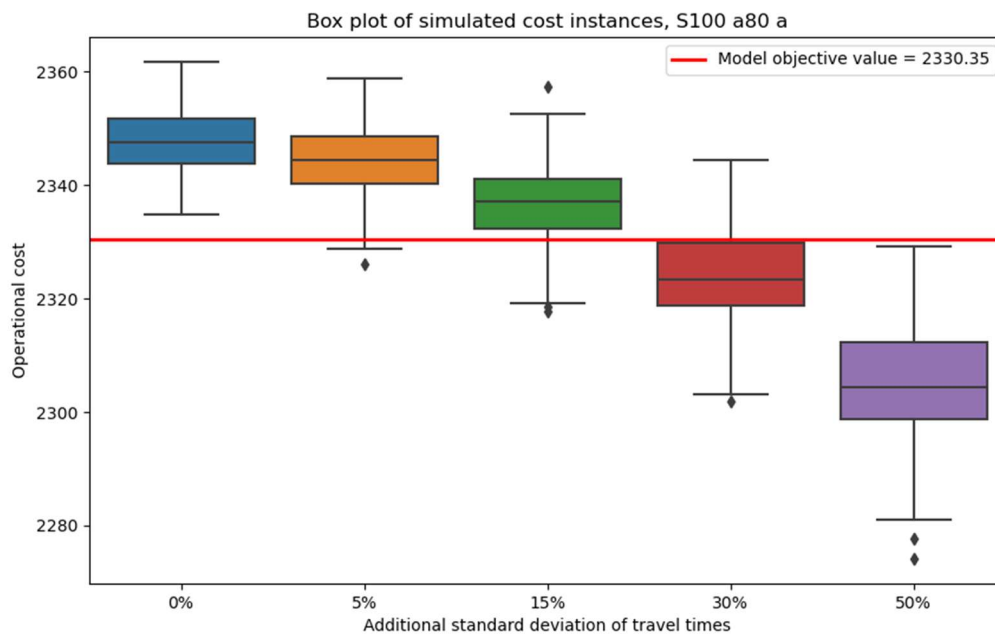
Παρακάτω, εμφανίζονται τα θηκογράμματα, των προσομοιώσεων του επιχειρησιακού κόστους. Σε κάθε περίπτωση η «θήκη» ορίζεται από το ενδοτεταρτημοριακό εύρος (IQR) του εκάστοτε δείγματος (75^ο με 25^ο εκατοστημόριο του δείγματος), ενώ οι οριακές τιμές ορίζονται ως οι τιμές που διαφέρουν κατά 1,5 IQR από την τιμή που ορίζει το αντίστοιχο όριο του IQR. Επιπλέον, η διάμεσος, ορίζεται με μια μαύρη γραμμή που τέμνει την θήκη και οι έκτοπες τιμές (outliers) εμφανίζονται ως ρομβίσκοι.



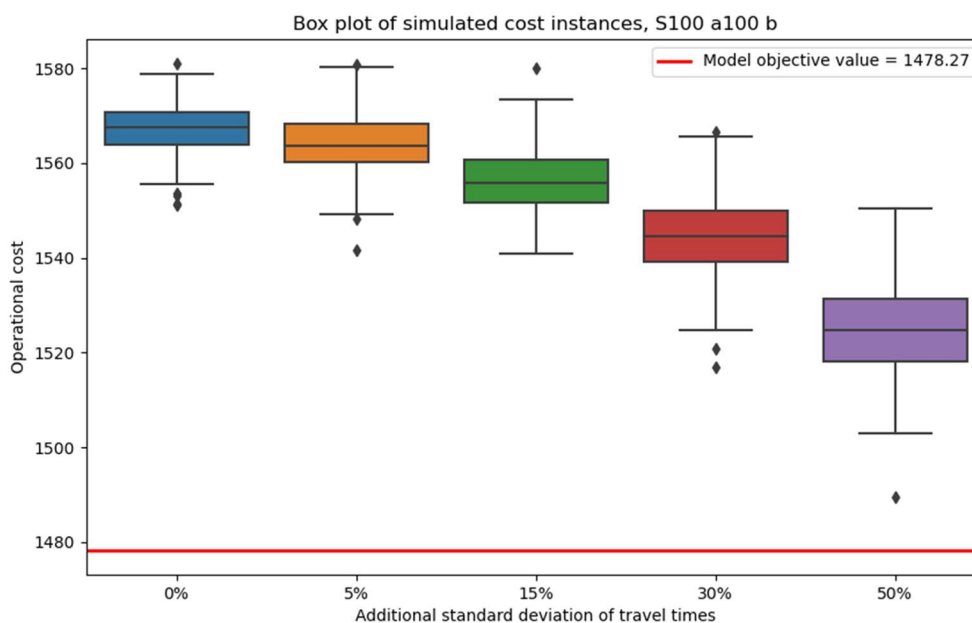
Διάγραμμα 5.1.1: Τιμές προσομοιώσεων επιχειρησιακού κόστους για το πρόγραμμα δρομολόγησης που αντιστοιχεί στο σενάριο δρομολόγησης D2_S2_C10_a και επίλυση χωρίς στοχαστικούς χρόνους διαδρομών υπηρεσίας



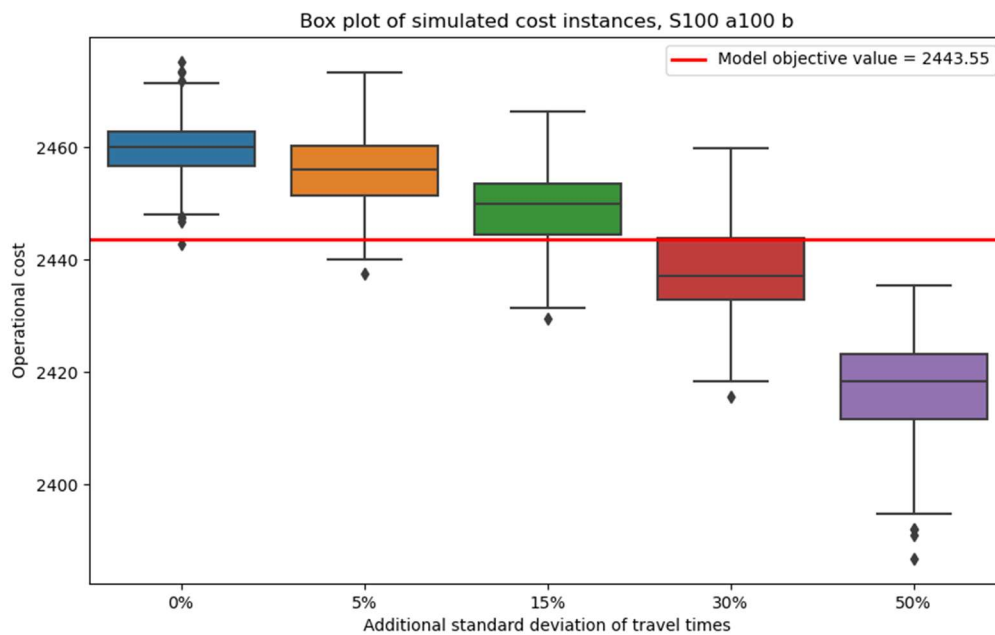
Διάγραμμα 5.1.2: Τιμές προσομοιώσεων επιχειρησιακού κόστους για το πρόγραμμα δρομολόγησης που αντιστοιχεί στο σενάριο δρομολόγησης D2_S2_C10_a και επίλυση με στοχαστικούς χρόνους διαδρομών υπηρεσίας, χωρίς περιορισμό πιθανότητας



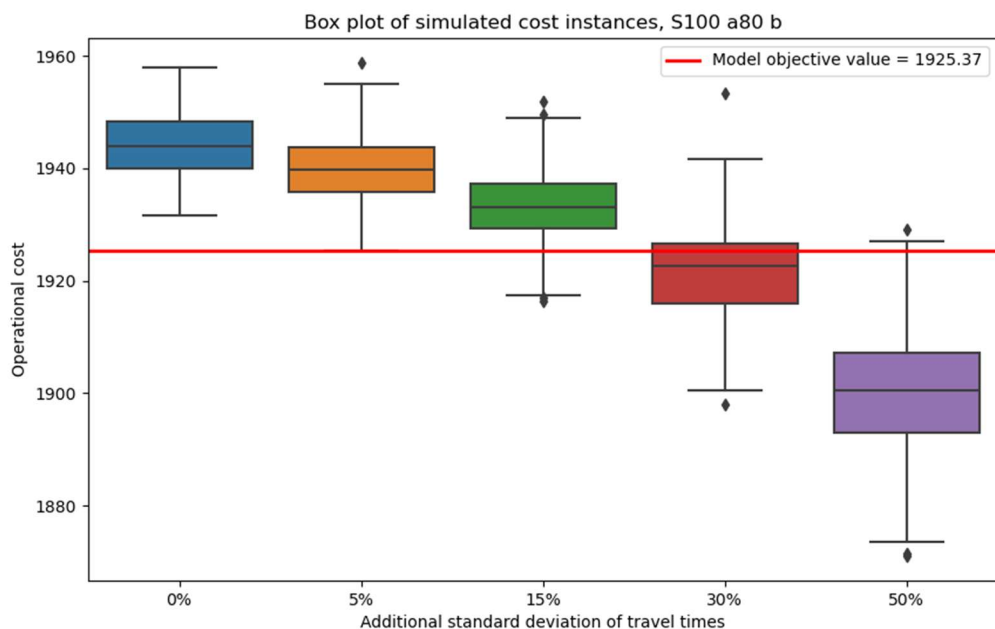
Διάγραμμα 5.1.3: Τιμές προσομοιώσεων επιχειρησιακού κόστους για το πρόγραμμα δρομολόγησης που αντιστοιχεί στο σενάριο δρομολόγησης D2_S2_C10_a και επίλυση με στοχαστικούς χρόνους διαδρομών υπηρεσίας, με περιορισμό πιθανότητας



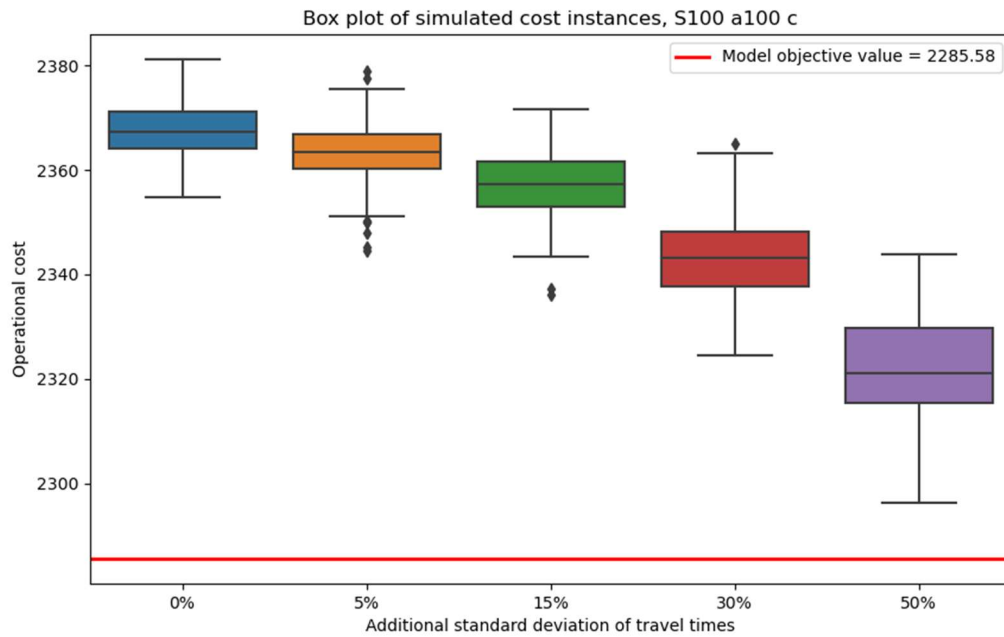
Διάγραμμα 5.2.1: Τιμές προσομοιώσεων επιχειρησιακού κόστους για το πρόγραμμα δρομολόγησης που αντιστοιχεί στο σενάριο δρομολόγησης D2_S2_C10_b και επίλυση χωρίς στοχαστικούς χρόνους διαδρομών υπηρεσίας



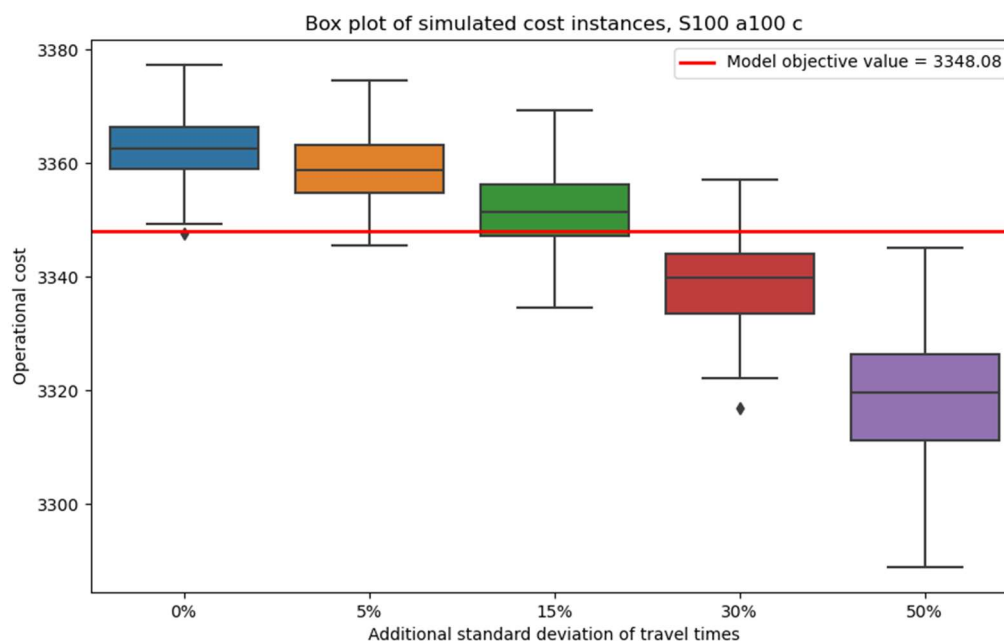
Διάγραμμα 5.2.2: Τιμές προσομοιώσεων επιχειρησιακού κόστους για το πρόγραμμα δρομολόγησης που αντιστοιχεί στο σενάριο δρομολόγησης D2_S2_C10_b και επίλυση με στοχαστικούς χρόνους διαδρομών υπηρεσίας, χωρίς περιορισμό πιθανότητας



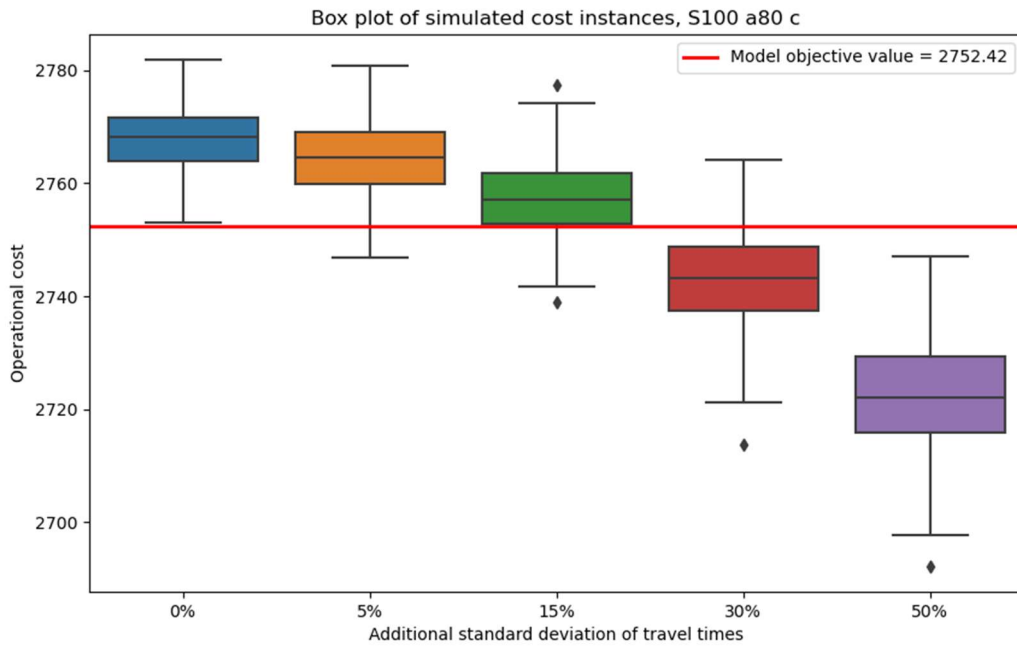
Διάγραμμα 5.2.3: Τιμές προσομοιώσεων επιχειρησιακού κόστους για το πρόγραμμα δρομολόγησης που αντιστοιχεί στο σενάριο δρομολόγησης D2_S2_C10_b και επίλυση με στοχαστικούς χρόνους διαδρομών υπηρεσίας, με περιορισμό πιθανότητας



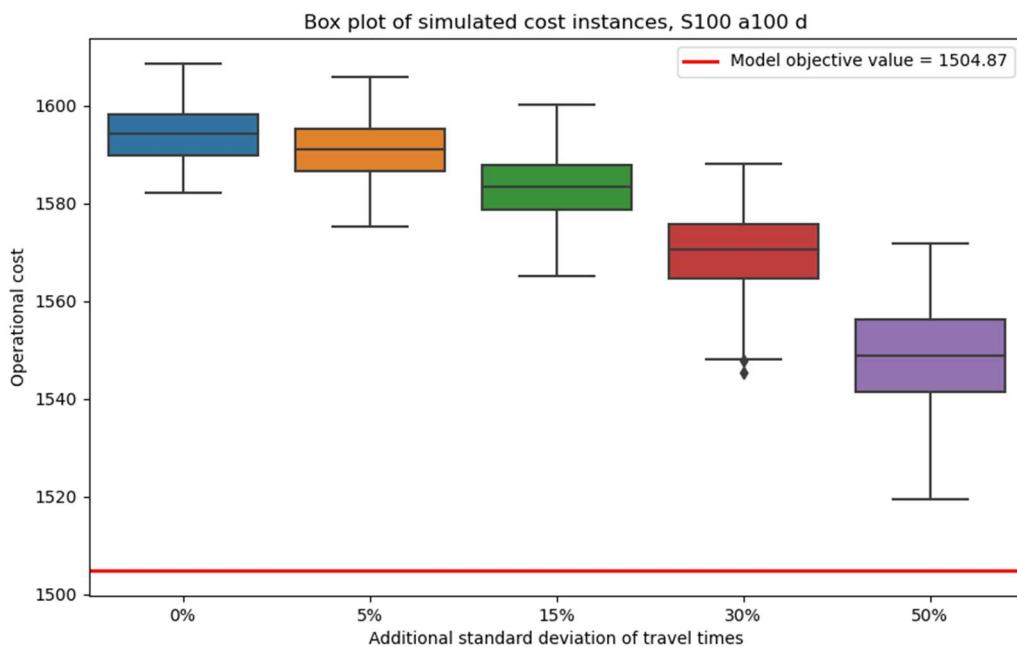
Διάγραμμα 5.3.1: Τιμές προσομοιώσεων επιχειρησιακού κόστους για το πρόγραμμα δρομολόγησης που αντιστοιχεί στο σενάριο δρομολόγησης D2_S2_C10_c και επίλυση χωρίς στοχαστικούς χρόνους διαδρομών υπηρεσίας



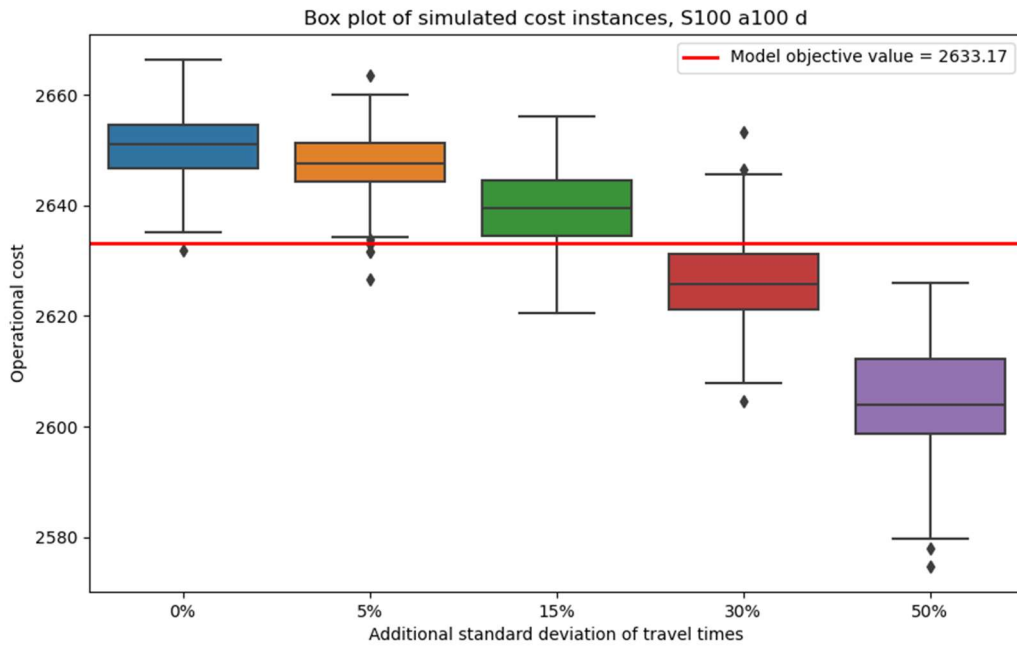
Διάγραμμα 5.3.2: Τιμές προσομοιώσεων επιχειρησιακού κόστους για το πρόγραμμα δρομολόγησης που αντιστοιχεί στο σενάριο δρομολόγησης D2_S2_C10_c και επίλυση με στοχαστικούς χρόνους διαδρομών υπηρεσίας, χωρίς περιορισμό πιθανότητας



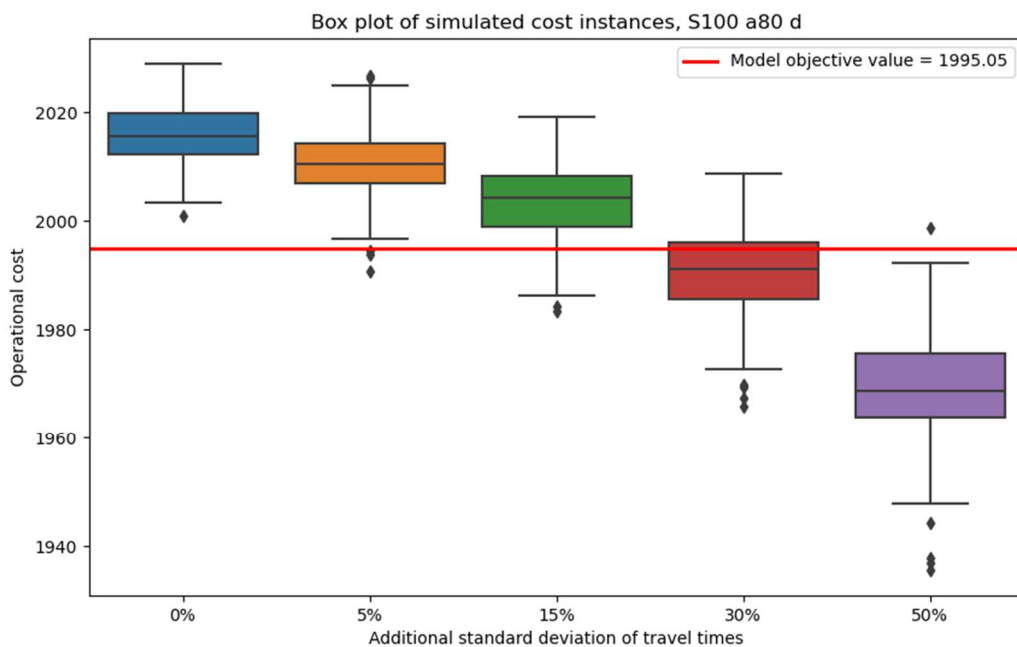
Διάγραμμα 5.3.3: Τιμές προσομοιώσεων επιχειρησιακού κόστους για το πρόγραμμα δρομολόγησης που αντιστοιχεί στο σενάριο δρομολόγησης D2_S2_C10_c και επίλυση με στοχαστικούς χρόνους διαδρομών υπηρεσίας, με περιορισμό πιθανότητας



Διάγραμμα 5.4.1: Τιμές προσομοιώσεων επιχειρησιακού κόστους για το πρόγραμμα δρομολόγησης που αντιστοιχεί στο σενάριο δρομολόγησης D2_S2_C10_d και επίλυση χωρίς στοχαστικούς χρόνους διαδρομών υπηρεσίας



Διάγραμμα 5.4.2: Τιμές προσομοιώσεων επιχειρησιακού κόστους για το πρόγραμμα δρομολόγησης που αντιστοιχεί στο σενάριο δρομολόγησης D2_S2_C10_d και επίλυση με στοχαστικούς χρόνους διαδρομών υπηρεσίας, χωρίς περιορισμό πιθανότητας



Διάγραμμα 5.4.3: Τιμές προσομοιώσεων επιχειρησιακού κόστους για το πρόγραμμα δρομολόγησης που αντιστοιχεί στο σενάριο δρομολόγησης D2_S2_C10_d και επίλυση με στοχαστικούς χρόνους διαδρομών υπηρεσίας, με περιορισμό πιθανότητας

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα, για συγκεκριμένο πρόγραμμα δρομολόγησης, εφόσον η μεταβολή της τυπικής απόκλισης των φυσικών λογάριθμων των χρόνων διαδρομής υπηρεσίας δεν είναι μεγαλύτερη του 15%, η μεταβολή του επιχειρησιακού κόστους είναι ανεπαίσθητη. Διότι, η μεταβολή του διάμεσου επιχειρησιακού κόστους κυμαίνεται γύρω στις 10 χρηματικές μονάδες, που σε κάθε περίπτωση αποτελεί μεταβολή κάτω του 1%. Όμως, το διάμεσο επιχειρησιακό κόστος μεταβάλλεται εκθετικά συναρτήσει της τυπικής απόκλισης των χρόνων διαδρομής, οπότε για ποσοστά μεταβολής της, άνω του 15%, η διαφορά παύει να είναι αμελητέα. Βέβαια, για λελογισμένη αύξηση της τυπικής απόκλισης των χρόνων διαδρομής – όπως αυτή της παρούσας ανάλυσης – η μεταβολή της διαμέσου του μέσου επιχειρησιακού κόστους παραμένει χαμηλή. Σε κάθε περίπτωση η τυπική απόκλιση του επιχειρησιακού κόστους δεν μεταβάλλεται σε σημαντικό βαθμό, καθώς τα ενδοτερτατημοριακά εύρη δεν διευρύνονται ιδιαίτερα, με την αύξηση της τυπικής απόκλισης των χρόνων διαδρομής υπηρεσίας. Επίσης, τα προγράμματα δρομολόγησης, που δημιουργήθηκαν με τις 2 εκδοχές του μοντέλου της παρούσας εργασίας παράγουν μέσο επιχειρησιακό κόστος αρκετά πλησιέστερο στο επιχειρησιακό κόστος που προβλέπει η επίλυση του μοντέλου.

6. Συμπεράσματα

Το πρόβλημα της δρομολόγησης ηλεκτρικών λεωφορείων με μπαταρίες είναι πολύπλοκο, με αρκετούς παράγοντες που πρέπει να ληφθούν υπόψιν. Σημαντικότεροι είναι η πεπερασμένη χωρητικότητα ενέργειας της μπαταρίας και ο χρόνος που απαιτείται για την φόρτισή της. Ταυτόχρονα, υπάρχουν ζητήματα όπως η επιβατική ζήτηση, η τυχαιότητα της κυκλοφορίας και τυχόν κυμαινόμενο κόστος ενέργειας κατά τη διάρκεια της ημέρας, που περιπλέκουν περαιτέρω τις αποφάσεις κατά τον προγραμματισμό των δρομολογίων. Σε αυτό το πλαίσιο, η παρούσα εργασία χρησιμοποιεί ως εφιαλτήριο την εργασία Gkiotsalitis, Iliorouli & Keraptsoglou (2023) η οποία παρέχει ένα μεικτών-ακεραίων γραμμικό μοντέλο (MILP), με στόχο την ελαχιστοποίηση του επιχειρησιακού κόστους, λαμβάνοντας υπόψιν χρονικά παράθυρα, πολλαπλά αμαξοστάσια και πολλαπλούς σταθμούς φόρτισης, με γεγονότα φόρτισης. Επίσης, χρησιμοποιούνται έγκυρες ανισότητες (valid inequalities) για τον περιορισμό του χώρου των εφικτών λύσεων.

Η παρούσα εργασία επεκτείνει το παραπάνω μοντέλο, θεωρώντας **στοχαστικούς χρόνους δρομολογίων**, που ακολουθούν την **λογαριθμο-κανονική κατανομή**. Στόχος αυτής της επέκτασης αποτελεί η παραγωγή προγραμμάτων δρομολόγησης που δίνουν την δυνατότητα σε έναν οργανισμό λειτουργίας συγκοινωνιών να ανταποκριθεί σε ακραίες συνθήκες δρομολόγησης, με λελογισμένο επιχειρησιακό κόστος. Παρόλα αυτά, αν κάποιος οργανισμός επιθυμεί μειωμένη κάλυψη σε ακραίες συνθήκες – αλλά όχι πλήρη παραμέλησή τους, για μία αντίστοιχη μείωση του επιχειρησιακού κόστους, μία δεύτερη εκδοχή του μοντέλου της παρούσας εργασίας προσφέρει αυτή τη δυνατότητα, με περιορισμό πιθανότητας. Ο περιορισμός πιθανότητας διατυπώνεται σε γραμμική μορφή, οπότε το μοντέλο δύναται να επιλυθεί με πρόγραμμα επίλυσης του εμπορίου.

Οι 2 εκδοχές του μοντέλου και το μοντέλο της αρχικής εργασίας επιλύονται χρησιμοποιώντας ενδεικτικά συνθετικά σενάρια δρομολόγησης, των 10 δρομολογίων. Η εκδοχή του μοντέλου χωρίς περιορισμό πιθανότητας παράγει προγράμματα δρομολόγησης με επιχειρησιακό κόστος από **49% έως 75% υψηλότερο**, από το **αρχικό μοντέλο**, χωρίς πολλαπλούς χρόνους δρομολογίων. Όμως, η εκδοχή του μοντέλου με περιορισμό πιθανότητας και **τιμή πιθανότητας $\alpha=80%$** (δηλαδή, 80% πιθανότητα να εκκινηθεί δρομολόγιο

χωρίς καθυστέρηση), παράγει προγράμματα δρομολόγησης με μόλις **20% με 33% υψηλότερο** επιχειρησιακό κόστος. Σε αυτό το σημείο, πρέπει να αναφερθεί πως **ο χρόνος επίλυσης**, για 100 ενδεχόμενα ανά χρόνο διαδρομής, αυξάνεται από **150 έως 250 φορές** περίπου και για τις δύο εκδοχές του μοντέλου, σε σχέση με το μοντέλο της αρχικής εργασίας. Και στις 2 εκδοχές του μοντέλου **παρατηρείται ευαισθησία στην μεταβολή της τυπικής απόκλισης των χρόνων διαδρομής**, αλλά οι τιμές του μέσου επιχειρησιακού κόστους των προσομοιώσεων, **δεν** μεταβάλλονται σημαντικά για **λελογισμένες** μεταβολές της τυπικής απόκλισης των χρόνων διαδρομής υπηρεσίας. Ουσιαστικά, η εισαγωγή της στοχαστικότητας χρόνων διαδρομής στον προγραμματισμό δρομολόγησης πράγματι αυξάνει το επιχειρησιακό κόστος. Όμως, αυτή η μέθοδος προγραμματισμού δρομολόγησης έχει ως αποτέλεσμα την αποκάλυψη ενός επιχειρησιακού κόστους **ακριβέστερου** στις πραγματικές συνθήκες, για τους οργανισμούς λειτουργίας συγκοινωνιών που στοχεύουν σε ένα **υψηλό επίπεδο υπηρεσίας**. Δηλαδή, την ομαλή λειτουργία σε δυσμενείς συνθήκες δρομολόγησης. Για τους οργανισμούς εκείνους που επιδεικνύουν μεγαλύτερη ευαισθησία στο επιχειρησιακό κόστος, αλλά επιθυμούν ένα βαθμό κάλυψης σε δυσμενείς συνθήκες δρομολόγησης, η εκδοχή του μοντέλου με περιορισμό πιθανότητας προσφέρει υψηλότερη ευελιξία.

Σε ο,τι αφορά τις προτάσεις για περαιτέρω έρευνα, σημαντική συνεισφορά θα αποτελούσε η επίλυση του προβλήματος που πραγματεύεται η εργασία με κάποια ευρετική ή μεταευρετική μέθοδο, δεδομένης της πολυπλοκότητάς του. Η εξοικονόμηση χρόνου υπολογισμού θα έδινε πρόσφορο έδαφος για την εφαρμογή του μοντέλου σε πραγματικά, μεγαλύτερα δίκτυα, καθώς και την δοκιμή περισσότερων τιμών πιθανότητας περιορισμού, ώστε να εξεταστεί η επιρροή της στο επιχειρησιακό κόστος. Επιπλέον ζήτημα προς διερεύνηση, αποτελεί και η επιρροή της επιβατικής κίνησης, καθώς και του ενεργειακού κόστους, στα χρονικά παράθυρα εκκίνησης των δρομολογίων. Ακόμη, αποτελεί ενδιαφέρον πεδίο μελέτης η βελτιστοποίηση του επιχειρησιακού κόστους με την μέθοδο του αναμενόμενου ελλείματος (expected shortfall).

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Al-Saadi, M.; Bhattacharyya, S.; Tichelen, P.V.; Mathes, M.; Käsgen, J.; Van Mierlo, J.; Berecibar, M. Impact on the Power Grid Caused via Ultra-Fast Charging Technologies of the Electric Buses Fleet. *Energies* **2022**, *15*, 1424. <https://doi.org/10.3390/en15041424>

Bie Y, Ji J, Wang X, Qu X. Optimization of electric bus scheduling considering stochastic volatilities in trip travel time and energy consumption. *Comput Aided Civ Inf.* 2021; 36: 1530–1548. <https://doi.org/10.1111/mice.12684>

Borén, Sven, Lisiana Nurhadi, and Henrik Ny. "Preference of electric buses in public transport: conclusions from real life testing in eight swedish municipalities." *The 18th International Conference on Sustainable Urban Transport and Environment, Madrid*. Vol. 10. 2016.

Maurizio Bruglieri, Ferdinando Pezzella, Ornella Pisacane, Stefano Suraci - A Variable Neighborhood Search Branching for the Electric Vehicle Routing Problem with Time Windows, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, Volume 47, 2015, Pages 221-228, ISSN 1571-0653, <https://doi.org/10.1016/j.endm.2014.11.029>

Bunte, S., Kliewer, N. An overview on vehicle scheduling models. *Public Transp* **1**, 299–317 (2009). <https://doi.org/10.1007/s12469-010-0018-5>

Carpaneto, Giorgio, et al. "A branch and bound algorithm for the multiple depot vehicle scheduling problem." *Networks* 19.5 (1989): 531-548.

Chau, M.L.Y.; Koutsompina, D.; Gkiotsalitis, K. The Electric Vehicle Scheduling Problem for Buses in Networks with Multi-Port Charging Stations. *Sustainability* 2024, *16*, 1305. <https://doi.org/10.3390/su16031305>

D'Agostino, R. B. (1971), "An omnibus test of normality for moderate and large sample size", *Biometrika*, 58, 341-348

K. Gkiotsalitis, C. Iliopoulou, K. Kepaptsoglou - An exact approach for the multi-depot electric bus scheduling problem with time windows, *European Journal of Operational Research*, Volume 306, Issue 1, 2023, Pages 189-206, ISSN 0377-2217, <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2022.07.017>

Google Transit (2024): <https://developers.google.com/transit>

gtfs.org (2024): <https://gtfs.org/>

Guenthner, Richard P., and Kasimin Hamat. *Distribution of bus transit on-time performance*. No. 1202. 1988.

Hale, Wayne E. "Sample size determination for the log-normal distribution." *Atmospheric Environment* (1967)

6.6 (1972): 419-422.

Yi He, Zhaocai Liu, Ziqi Song - Joint optimization of electric bus charging infrastructure, vehicle scheduling, and charging management, *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, Volume 117, 2023, 103653, ISSN 1361-9209, <https://doi.org/10.1016/j.trd.2023.103653>

David A. Hensher, Edward Wei, Camila Balbontin - Comparative assessment of zero emission electric and hydrogen buses in Australia, *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, Volume 102, 2022, 103130, ISSN 1361-9209, <https://doi.org/10.1016/j.trd.2021.103130>

Hao Hu, Bo Du, Wei Liu, Pascal Perez - A joint optimisation model for charger locating and electric bus charging scheduling considering opportunity fast charging and uncertainties, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Volume 141, 2022, 103732, ISSN 0968-090X, <https://doi.org/10.1016/j.trc.2022.103732>

Di Huang, Shuaian Wang - A two-stage stochastic programming model of coordinated electric bus charging scheduling for a hybrid charging scheme, *Multimodal Transportation*, Volume 1, Issue 1, 2022, 100006, ISSN 2772-5863, <https://doi.org/10.1016/j.multra.2022.100006>

Di Huang, Jinyu Zhang, Zhiyuan Liu - A robust coordinated charging scheduling approach for hybrid electric bus charging systems, *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, Volume 125, 2023, 103955, ISSN 1361-9209, <https://doi.org/10.1016/j.trd.2023.103955>

Christina Iliopoulou, Konstantinos Kepaptsoglou - Robust electric transit route network design problem (RE-TRNDP) with delay considerations: Model and application, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Volume 129, 2021, 103255, ISSN 0968-090X, <https://doi.org/10.1016/j.trc.2021.103255>

ITF, *Transport Outlook 2023*

Mengyan Jiang, Yi Zhang, Yi Zhang, "Optimal Electric Bus Scheduling under Travel Time Uncertainty: A Robust Model and Solution Method", *Journal of Advanced Transportation*, vol. 2021, Article ID 1191443, 19 pages, 2021. <https://doi.org/10.1155/2021/1191443>

Kiggins, R.D. (2015). The Strategic and Security Implications of Rare Earths. In: Kiggins, R.D. (eds) *The Political Economy of Rare Earth Elements*. International Political Economy Series. Palgrave Macmillan, London. https://doi.org/10.1057/9781137364241_1

Laib, Felix, Andreas Braun, and Wolfgang Rid. "Modelling noise reductions using electric buses in urban traffic. A case study from Stuttgart, Germany." *Transportation Research Procedia* 37 (2019): 377-384. <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2018.12.206>

Xinghua Li, Tianzuo Wang, Lingjie Li, Feiyu Feng, Wei Wang, Cheng Cheng, "Joint Optimization of Regular

Charging Electric Bus Transit Network Schedule and Stationary Charger Deployment considering Partial Charging Policy and Time-of-Use Electricity Prices", *Journal of Advanced Transportation*, vol. 2020, Article ID 8863905, 16 pages, 2020. <https://doi.org/10.1155/2020/8863905>

Tao Liu, Avishai (Avi) Ceder - Battery-electric transit vehicle scheduling with optimal number of stationary chargers, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Volume 114, 2020, Pages 118-139, ISSN 0968-090X, <https://doi.org/10.1016/j.trc.2020.02.009>

Ma, Z., Ferreira, L., Mesbah, M., and Zhu, S. (2016) Modeling distributions of travel time variability for bus operations. *J. Adv. Transp.*, 50: 6–24. doi: [10.1002/atr.1314](https://doi.org/10.1002/atr.1314).

Matzoros Athanasios, and Athens Public Transport Authority. "Electric trolley buses or thermal buses." *The case of Athens* (2002).

Erika Picarelli, Marco Rinaldi, Andrea D'Ariano, Francesco Viti - Model and Solution Methods for the Mixed-Fleet Multi-Terminal Bus Scheduling Problem, *Transportation Research Procedia*, Volume 47, 2020, Pages 275-282, ISSN 2352-1465, <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2020.03.099>

Rahman, Md Matiur, S. C. Wirasinghe, and Lina Kattan. "Analysis of bus travel time distributions for varying horizons and real-time applications." *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* 86 (2018): 453-466, ISSN 0968-090X, <https://doi.org/10.1016/j.trc.2017.11.023>.

Raschke K. (2022), gtfs-rt-dump, Github: <https://github.com/kurtraschke/gtfs-rt-dump>

Hannah Ritchie, Pablo Rosado and Max Roser (2020) - "Emissions by sector: where do greenhouse gases come from?" Published online at OurWorldInData.org. Retrieved from: <https://ourworldindata.org/emissions-by-sector> [Online Resource]

Robertson, Sandy, et al. "The effect of speed on noise, vibration and emissions from vehicles." *Public Master* (1998).

Matthias Rogge, Evelien van der Hurk, Allan Larsen, Dirk Uwe Sauer - Electric bus fleet size and mix problem with optimization of charging infrastructure, *Applied Energy*, Volume 211, 2018, Pages 282-295, ISSN 0306-2619, <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2017.11.051>

Royston P., "Remark AS R94: A Remark on Algorithm AS 181: The W-test for Normality", 1995, *Applied Statistics*, Vol. 44, DOI:[10.2307/2986146](https://doi.org/10.2307/2986146)

Shapiro, S. S. & Wilk, M.B., "An analysis of variance test for normality (complete samples)", *Biometrika*, 1965, Vol. 52, pp. 591-611, DOI:[10.2307/2333709](https://doi.org/10.2307/2333709)

eCity, Solaris, How long does it take to charge an electric bus?, <https://ecity.solarisbus.com/en/knowledge->

[base/how-long-does-it-take-to-charge-an-electric-bus](#)

Strathman, J. and Janet Hopper. "Empirical analysis of bus transit on-time performance☆." *Transportation Research Part A-policy and Practice* 27 (1993): 93-100.

Xindi Tang, Xi Lin, Fang He - Robust scheduling strategies of electric buses under stochastic traffic conditions, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Volume 105, 2019, Pages 163-182, ISSN 0968-090X, <https://doi.org/10.1016/j.trc.2019.05.032>

Tsoi, Ka Ho, et al. "The co-benefits of electric mobility in reducing traffic noise and chemical air pollution: Insights from a transit-oriented city." *Environment International* 178 (2023): 108116. <https://doi.org/10.1016/j.envint.2023.108116>

Turnquist, Mark A. "A model for investigating the effects of service frequency and reliability on bus passenger waiting times." *Transportation Research Record* 663 (1978): 70-73.

Dionysios Tzamakos, Christina Iliopoulou, Konstantinos Kepaptsoglou - Electric bus charging station location optimization considering queues, *International Journal of Transportation Science and Technology*, Volume 12, Issue 1, 2023, Pages 291-300, ISSN 2046-0430, <https://doi.org/10.1016/j.ijst.2022.02.007>

U.S. Department of Transportation, Electric Bus Basics, <https://www.transportation.gov/urban-e-mobility-toolkit/e-mobility-basics/bus>

Tugce Uslu, Onur Kaya - Location and capacity decisions for electric bus charging stations considering waiting times, *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, Volume 90, 2021, 102645, ISSN 1361-9209, <https://doi.org/10.1016/j.trd.2020.102645>

van Kooten Niekerk, M.E., van den Akker, J.M. & Hoogeveen, J.A. Scheduling electric vehicles. *Public Transp* 9, 155–176 (2017). <https://doi.org/10.1007/s12469-017-0164-0>

Vekasi, Kristin. "The Geoeconomics of Critical Rare Earth Minerals." *Georgetown Journal of International Affairs*, vol. 22 no. 2, 2021, p. 271-279. *Project MUSE*, <https://doi.org/10.1353/gia.2021.0039>

Haixing Wang, Jinsheng Shen - Heuristic approaches for solving transit vehicle scheduling problem with route and fueling time constraints, *Applied Mathematics and Computation*, Volume 190, Issue 2, 2007, Pages 1237-1249, ISSN 0096-3003, <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.02.141>

Yusheng Wang, Yongxi Huang, Jiuping Xu, Nicole Barclay - Optimal recharging scheduling for urban electric buses: A case study in Davis, *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, Volume 100, 2017, Pages 115-132, ISSN 1366-5545, <https://doi.org/10.1016/j.tre.2017.01.001>

Chunlu Wang, Congcong Guo, Xingquan Zuo - Solving multi-depot electric vehicle scheduling problem by

column generation and genetic algorithm, *Applied Soft Computing*, Volume 112, 2021, 107774, ISSN 1568-4946, <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2021.107774>

Sandra Wappelhorst and Felipe Rodríguez, ICCT, Decarbonizing bus fleets: Global overview of targets for phasing out combustion engine vehicles, December 9, 2021, <https://theicct.org/decarbonizing-bus-fleets-global-overview-of-targets-for-phasing-out-combustion-engine-vehicles/>

M. Wen, E. Linde, S. Ropke, P. Mirchandani, A. Larsen - An adaptive large neighborhood search heuristic for the Electric Vehicle Scheduling Problem, *Computers & Operations Research*, Volume 76, 2016, Pages 73-83, ISSN 0305-0548, <https://doi.org/10.1016/j.cor.2016.06.013>

Weitiao Wu, Yue Lin, Ronghui Liu, Wenzhou Jin - The multi-depot electric vehicle scheduling problem with power grid characteristics, *Transportation Research Part B: Methodological*, Volume 155, 2022, Pages 322-347, ISSN 0191-2615, <https://doi.org/10.1016/j.trb.2021.11.007>

Xu, J., Cai, X., Cai, S., Shao, Y., Hu, C., Lu, S. and Ding, S. (2023), High-Energy Lithium-Ion Batteries: Recent Progress and a Promising Future in Applications. *Energy Environ. Mater.*, 6: e12450. <https://doi.org/10.1002/eem2.12450>

Xiaoming Xu, Yanhong Yu, Jiancheng Long - Integrated electric bus timetabling and scheduling problem, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Volume 149, 2023, 104057, ISSN 0968-090X, <https://doi.org/10.1016/j.trc.2023.104057>

Şule Yıldırım, Barış Yıldız - Electric bus fleet composition and scheduling, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Volume 129, 2021, 103197, ISSN 0968-090X, <https://doi.org/10.1016/j.trc.2021.103197>

G. -J. Zhou, D. -F. Xie, X. -M. Zhao and C. Lu, "Collaborative Optimization of Vehicle and Charging Scheduling for a Bus Fleet Mixed With Electric and Traditional Buses," in *IEEE Access*, vol. 8, pp. 8056-8072, 2020, doi: 10.1109/ACCESS.2020.2964391

Yu Zhou, Hua Wang, Yun Wang, Rui Li - Robust optimization for integrated planning of electric-bus charger deployment and charging scheduling, *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, Volume 110, 2022, 103410, ISSN 1361-9209, <https://doi.org/10.1016/j.trd.2022.103410>

Zarząd Transportu Publicznego w Krakowie (2024): <http://gtfs.ztp.krakow.pl/>

Ευρωπαϊκή Επιτροπή (2023) - Ευρωπαϊκή Πράσινη Συμφωνία: Η Επιτροπή προτείνει στόχο μηδενικών εκπομπών για τα νέα αστικά λεωφορεία έως το 2030 και μείωση εκπομπών κατά 90 % για τα νέα φορτηγά έως το 2040 https://ec.europa.eu/commission/presscorner/detail/el/ip_23_762

Σταθόπουλος, Α. (2004). Συνδυασμένες Μεταφορές – Ειδικά Συστήματα – Υπολογιστικές Μέθοδοι

Παράρτημα

Πίνακας 1.α: Τιμές ξ_i^s σεναρίου δρομολόγησης α

s	Σενάριο: α									
	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10
1	26,53	29,33	25,71	21,98	26,43	37,68	23,97	18,73	16,02	22,72
2	20,86	22,19	20,06	17,30	20,53	28,92	18,55	14,70	12,61	17,69
3	15,43	15,65	14,70	12,81	14,96	20,75	13,45	10,85	9,34	12,92
4	29,48	33,16	28,68	24,43	29,53	42,33	26,83	20,84	17,79	25,37
5	26,87	29,78	26,06	22,27	26,79	38,23	24,30	18,98	16,23	23,04
6	13,93	13,89	13,23	11,56	13,43	18,54	12,06	9,79	8,44	11,61
7	18,00	18,70	17,23	14,93	17,58	24,58	15,85	12,67	10,89	15,16
8	13,48	13,38	12,79	11,19	12,98	17,89	11,65	9,47	8,17	11,22
9	12,58	12,35	11,91	10,45	12,07	16,57	10,82	8,83	7,63	10,44
10	40,15	47,44	39,44	33,24	40,85	59,48	37,29	28,45	24,19	35,01
11	18,13	18,87	17,37	15,04	17,72	24,79	15,97	12,77	10,97	15,28
12	26,56	29,37	25,75	22,01	26,46	37,73	24,00	18,76	16,04	22,75
13	23,31	25,25	22,50	19,32	23,07	32,68	20,88	16,44	14,08	19,86
14	21,13	22,53	20,33	17,52	20,81	29,33	18,80	14,89	12,77	17,93
15	13,97	13,94	13,26	11,60	13,47	18,59	12,09	9,81	8,46	11,64
16	14,14	14,14	13,44	11,74	13,65	18,85	12,26	9,94	8,57	11,80
17	24,38	26,60	23,57	20,21	24,18	34,34	21,90	17,20	14,73	20,81
18	31,54	35,86	30,75	26,13	31,70	45,60	28,83	22,31	19,03	27,22
19	10,37	9,87	9,75	8,61	9,85	13,39	8,80	7,27	6,29	8,53
20	14,53	14,59	13,81	12,06	14,04	19,42	12,61	10,21	8,80	12,13
21	19,15	20,10	18,37	15,88	18,77	26,32	16,93	13,49	11,58	16,18
22	30,57	34,58	29,77	25,33	30,67	44,06	27,88	21,61	18,44	26,35
23	25,27	27,74	24,46	20,95	25,12	35,73	22,76	17,84	15,27	21,61
24	28,01	31,25	27,20	23,21	27,98	40,01	25,40	19,79	16,91	24,05
25	22,61	24,37	21,81	18,75	22,34	31,61	20,21	15,95	13,66	19,24
26	14,45	14,50	13,74	12,00	13,96	19,31	12,54	10,16	8,75	12,06
27	19,63	20,68	18,84	16,28	19,26	27,04	17,38	13,83	11,87	16,60
28	33,22	38,09	32,44	27,52	33,48	48,29	30,47	23,51	20,04	28,74
29	22,05	23,67	21,25	18,28	21,76	30,74	19,68	15,55	13,32	18,74
30	13,06	12,89	12,37	10,84	12,55	17,26	11,25	9,17	7,91	10,85
31	35,12	40,62	34,35	29,08	35,49	51,33	32,33	24,86	21,17	30,45
32	24,52	26,78	23,71	20,33	24,33	34,56	22,04	17,31	14,81	20,94
33	27,15	30,14	26,34	22,50	27,08	38,66	24,57	19,18	16,39	23,28
34	43,21	51,67	42,55	35,77	44,13	64,50	40,34	30,64	26,03	37,80
35	16,82	17,29	16,07	13,96	16,37	22,82	14,74	11,84	10,18	14,13
36	16,01	16,33	15,27	13,29	15,55	21,61	13,99	11,26	9,69	13,42
37	8,07	7,38	7,53	6,71	7,57	10,16	6,74	5,65	4,90	6,57
38	21,83	23,40	21,03	18,10	21,53	30,40	19,47	15,39	13,19	18,54
39	25,93	28,57	25,12	21,49	25,80	36,75	23,39	18,31	15,66	22,19
40	20,48	21,73	19,69	16,99	20,14	28,35	18,19	14,44	12,38	17,35
41	20,76	22,08	19,97	17,22	20,43	28,77	18,45	14,63	12,55	17,60
42	29,34	32,98	28,54	24,31	29,38	42,11	26,69	20,74	17,71	25,24
43	24,18	26,35	23,38	20,05	23,98	34,04	21,72	17,07	14,61	20,64
44	24,10	26,25	23,29	19,98	23,90	33,91	21,64	17,01	14,56	20,57
45	20,11	21,28	19,32	16,68	19,76	27,78	17,84	14,17	12,16	17,03
46	20,31	21,52	19,52	16,84	19,96	28,08	18,02	14,31	12,28	17,20
47	30,52	34,52	29,72	25,28	30,62	43,98	27,83	21,58	18,41	26,30
48	19,84	21,07	19,15	16,54	19,59	27,52	17,68	14,05	12,06	16,88
49	17,64	18,28	16,88	14,64	17,21	24,05	15,51	12,42	10,67	14,85
50	16,79	17,26	16,04	13,93	16,35	22,78	14,72	11,82	10,16	14,11
51	19,74	20,82	18,96	16,37	19,37	27,21	17,49	13,91	11,94	16,70
52	22,18	23,84	21,38	18,39	21,90	30,95	19,81	15,64	13,41	18,86
53	25,03	27,42	24,22	20,75	24,86	35,35	22,53	17,67	15,12	21,39
54	21,70	23,24	20,90	17,99	21,40	30,21	19,35	15,30	13,12	18,43
55	18,24	19,00	17,47	15,13	17,83	24,95	16,08	12,84	11,04	15,38
56	11,20	10,79	10,56	9,30	10,68	14,58	9,55	7,86	6,79	9,25
57	26,05	28,73	25,24	21,59	25,93	36,95	23,51	18,40	15,73	22,30
58	14,24	14,25	13,53	11,82	13,74	18,99	12,34	10,00	8,62	11,88
59	19,44	20,46	18,66	16,13	19,07	26,77	17,21	13,70	11,76	16,44
60	32,30	36,87	31,51	26,76	32,50	46,82	29,57	22,85	19,48	27,91
61	22,69	24,48	21,89	18,81	22,43	31,73	20,29	16,01	13,71	19,31
62	15,22	15,41	14,50	12,64	14,75	20,45	13,26	10,70	9,22	12,74
63	26,89	29,81	26,08	22,29	26,81	38,26	24,32	18,99	16,24	23,05
64	18,68	19,53	17,91	15,50	18,28	25,61	16,49	13,16	11,30	15,77
65	17,24	17,79	16,48	14,30	16,80	23,44	15,13	12,13	10,43	14,50
66	32,94	37,71	32,16	27,28	33,18	47,84	30,20	23,30	19,87	28,48
67	26,62	29,46	25,81	22,06	26,53	37,84	24,06	18,80	16,08	22,81
68	68,26	87,81	68,20	56,43	71,34	106,72	65,69	48,57	41,01	60,88
69	13,77	13,72	13,08	11,44	13,27	18,31	11,91	9,68	8,35	11,47
70	20,73	22,04	19,94	17,20	20,40	28,73	18,43	14,62	12,54	17,58
71	24,34	26,55	23,53	20,18	24,14	34,28	21,87	17,18	14,70	20,78
72	33,98	39,10	33,21	28,15	34,28	49,51	31,22	24,05	20,49	29,42
73	18,80	19,68	18,02	15,59	18,40	25,79	16,60	13,24	11,37	15,87
74	37,54	43,89	36,80	31,08	38,06	55,24	34,71	26,59	22,63	32,64
75	22,02	23,64	21,22	18,26	21,73	30,70	19,65	15,53	13,31	18,72
76	15,83	16,12	15,10	13,14	15,37	21,35	13,82	11,14	9,59	13,27
77	19,65	20,71	18,87	16,30	19,28	27,08	17,40	13,84	11,88	16,62
78	20,52	21,78	19,73	17,02	20,18	28,41	18,23	14,46	12,41	17,39
79	19,89	21,00	19,10	16,49	19,53	27,44	17,63	14,01	12,03	16,83
80	16,72	17,17	15,97	13,87	16,27	22,67	14,65	11,76	10,12	14,04
81	19,31	20,30	18,53	16,02	19,83	26,57	17,09	13,61	11,68	16,32
82	30,18	34,07	29,38	25,00	30,26	43,44	27,50	21,34	18,21	26,00
83	29,18	32,76	28,37	24,17	29,21	41,85	26,53	20,62	17,61	25,10
84	42,64	50,88	41,97	35,30	43,52	63,57	39,77	30,23	25,68	37,28
85	15,33	15,53	14,60	12,72	14,85	20,60	13,35	10,78	9,28	12,83
86	14,14	14,13	13,43	11,73	13,64	18,84	12,25	9,93	8,56	11,79
87	46,27	55,94	45,66	38,29	47,42	69,55	43,39	32,83	27,86	40,59
88	24,23	26,41	23,42	20,08	24,02	34,10	21,76	17,10	14,64	20,67
89	24,37	26,59	23,56	20,20	24,18	34,33	21,90	17,20	14,72	20,80
90	15,20	15,38	14,48	12,62	14,72	20,41	13,24	10,69	9,21	12,72
91	24,34	26,55	23,53	20,18	24,14	34,28	21,87	17,18	14,70	20,78
92	21,44	22,92	20,65	17,78	21,13	29,81	19,10	15,12	12,96	18,20
93	21,17	22,58	20,37	17,55	20,85	29,39	18,84	14,92	12,80	17,96
94	32,69	37,38	31,91	27,08	32,92	47,44	29,95	23,13	19,72	28,26
95	15,48	15,70	14,75	12,85	15,00	20,82	13,49	10,88	9,37	12,96
96	22,20	23,86	21,40	18,41	21,92	30,97	19,82	15,66	13,42	18,87
97	10,82	10,37	10,20	8,99	10,30	14,04	9,21	7,59	6,57	8,93
98	24,56	26,82	23,75	20,36	24,37	34,61	22,07	17,33	14,83	20,97
99	13,75	13,69	13,05	11,41	13,25	18,27	11,89	9,66	8,33	11,45
100	40,93	48,51	40,23	33,88	41,68	60,75	38,06	29,00	24,65	35,72

Πίνακας 1.β: Τιμές ξ_i^S σεναρίου δρομολόγησης b

s	Σενάριο: b									
	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10
1	20,63	27,30	23,77	26,37	23,91	27,08	30,93	47,63	25,33	13,57
2	16,80	21,19	19,30	21,14	18,06	21,46	23,93	38,06	18,69	10,61
3	12,99	15,43	14,86	16,02	12,70	16,03	17,35	28,73	12,77	7,80
4	22,58	30,51	26,05	29,06	27,05	30,00	34,61	52,57	28,95	15,11
5	20,86	27,67	24,04	26,69	24,28	27,43	31,36	48,21	25,75	13,75
6	11,91	13,85	13,60	14,58	11,27	14,52	15,55	26,11	11,22	7,03
7	14,82	18,14	16,98	18,46	15,20	18,60	20,45	33,16	15,51	9,13
8	11,58	13,38	13,22	14,15	10,85	14,07	15,03	25,33	10,77	6,80
9	10,92	12,44	12,45	13,28	10,01	13,16	13,96	23,74	9,87	6,33
10	29,38	42,24	34,04	38,61	38,80	40,45	48,12	70,13	42,77	20,72
11	14,91	18,29	17,09	18,58	15,33	18,74	20,61	33,40	15,66	9,20
12	20,65	27,33	23,79	26,40	23,94	27,11	30,97	47,68	25,37	13,58
13	18,48	23,82	21,25	23,42	20,56	23,90	26,94	42,22	21,51	11,89
14	16,99	21,48	19,51	21,39	18,33	21,73	24,26	38,52	19,00	10,75
15	11,93	13,89	13,63	14,62	11,30	14,56	15,60	26,18	11,26	7,05
16	12,06	14,08	13,78	14,79	11,47	14,73	15,81	26,48	11,44	7,14
17	19,20	24,97	22,09	24,40	21,66	24,96	28,26	44,02	22,76	12,45
18	23,92	32,76	27,62	30,93	29,27	32,03	37,20	55,99	31,53	16,19
19	9,25	10,15	10,53	11,11	7,98	10,91	11,35	19,82	7,73	5,20
20	12,34	14,48	14,10	15,15	11,83	15,12	16,27	27,15	11,83	7,34
21	15,62	19,37	17,92	19,54	16,34	19,76	21,85	35,14	16,78	9,73
22	23,29	31,70	26,88	30,05	28,22	31,07	35,98	54,38	30,30	15,68
23	19,80	25,94	22,79	25,23	22,60	25,84	29,37	45,53	23,83	12,91
24	21,61	28,91	24,92	27,73	25,48	28,55	32,77	50,11	27,13	14,34
25	18,00	23,07	20,70	22,77	19,84	23,20	26,08	41,04	20,70	11,53
26	12,29	14,40	14,04	15,08	11,76	15,04	16,18	27,02	11,76	7,30
27	15,95	19,88	18,31	19,99	16,82	20,23	22,43	35,96	17,31	9,97
28	25,00	34,60	28,89	32,44	31,10	33,68	39,32	58,77	33,67	17,07
29	17,62	22,46	20,25	22,24	19,26	22,64	25,39	40,08	20,05	11,23
30	11,27	12,94	12,86	13,74	10,45	13,64	14,52	24,58	10,34	6,58
31	26,21	36,69	30,31	34,14	33,19	35,53	41,72	61,89	36,11	18,07
32	19,29	25,13	22,21	24,54	21,82	25,10	28,44	44,27	22,94	12,52
33	21,04	27,97	24,25	26,94	24,57	27,70	31,70	48,67	26,08	13,89
34	31,29	45,64	36,28	41,32	42,28	43,44	52,05	75,11	46,94	22,33
35	13,99	16,89	16,02	17,34	14,05	17,42	19,02	31,13	14,24	8,52
36	13,41	16,04	15,34	16,57	13,26	16,61	18,05	29,73	13,38	8,10
37	7,47	7,79	8,47	8,82	5,96	8,56	8,69	15,69	5,63	4,02
38	17,47	22,23	20,07	22,04	19,04	22,42	25,12	39,70	19,80	11,12
39	20,23	26,65	23,30	25,82	23,28	26,49	30,18	46,63	24,61	13,26
40	16,55	20,79	19,00	20,79	17,68	21,09	23,47	37,42	18,27	10,42
41	16,74	21,09	19,22	21,05	17,96	21,36	23,81	37,89	18,58	10,56
42	22,48	30,36	25,94	28,94	26,90	29,86	34,44	52,33	28,77	15,04
43	19,07	24,77	21,94	24,22	21,47	24,77	28,02	43,70	22,54	12,35
44	19,01	24,68	21,87	24,15	21,38	24,68	27,92	43,56	22,44	12,30
45	16,29	20,39	18,70	20,44	17,30	20,72	23,02	36,78	17,85	10,23
46	16,42	20,60	18,86	20,63	17,50	20,91	23,26	37,12	18,07	10,33
47	23,25	31,64	26,84	30,00	28,17	31,02	35,92	54,29	30,24	15,66
48	16,17	20,21	18,56	20,28	17,13	20,54	22,81	36,49	17,66	10,14
49	14,57	17,76	16,69	18,12	14,85	18,25	20,01	32,55	15,12	8,94
50	13,97	16,87	15,99	17,32	14,02	17,40	18,99	31,09	14,21	8,51
51	16,03	20,00	18,40	20,09	16,93	20,34	22,56	36,15	17,43	10,03
52	17,71	22,61	20,36	22,37	19,40	22,78	25,56	40,31	20,20	11,30
53	19,63	25,68	22,60	25,00	22,34	25,60	29,07	45,12	23,54	12,79
54	17,38	22,09	19,97	21,92	18,91	22,30	24,96	39,49	19,65	11,05
55	14,99	18,40	17,18	18,69	15,44	18,85	20,74	33,58	15,78	9,26
56	9,88	11,01	11,26	11,93	8,73	11,75	12,33	21,30	8,52	5,62
57	20,32	26,79	23,40	25,94	23,42	26,62	30,34	46,84	24,76	13,32
58	12,13	14,17	13,86	14,88	11,56	14,83	15,92	26,65	11,53	7,19
59	15,83	19,68	18,16	19,82	16,64	20,05	22,20	35,64	17,10	9,88
60	24,41	33,59	28,19	31,61	30,10	32,77	38,16	57,25	32,49	16,59
61	18,06	23,16	20,76	22,84	19,93	23,28	26,18	41,17	20,79	11,57
62	12,85	15,21	14,69	15,82	12,50	15,82	17,10	28,37	12,56	7,70
63	20,87	27,70	24,05	26,71	24,30	27,44	31,38	48,25	25,77	13,76
64	15,29	18,87	17,54	19,10	15,88	19,29	21,28	34,34	16,26	9,48
65	14,28	17,33	16,36	17,74	14,45	17,84	19,53	31,85	14,69	8,74
66	24,82	34,29	28,68	32,19	30,80	33,40	38,96	58,30	33,31	16,93
67	20,70	27,40	23,84	26,46	24,02	27,18	31,05	47,80	25,45	13,62
68	46,22	73,88	53,92	62,92	72,12	67,61	84,76	115,08	83,65	35,62
69	11,79	13,69	13,47	14,43	11,12	14,36	15,37	25,84	11,06	6,95
70	16,72	21,06	19,20	21,03	17,93	21,34	23,78	37,85	18,55	10,55
71	19,17	24,94	22,06	24,37	21,63	24,92	28,22	43,96	22,72	12,43
72	25,49	35,44	29,46	33,13	31,94	34,42	40,28	60,03	34,65	17,48
73	15,38	18,99	17,64	19,21	15,99	19,41	21,42	34,54	16,39	9,55
74	27,75	39,35	32,12	36,30	35,87	37,90	44,79	65,87	39,29	19,34
75	17,60	22,44	20,23	22,22	19,24	22,62	25,36	40,04	20,02	11,22
76	13,28	15,85	15,20	16,40	13,09	16,43	17,83	29,42	13,19	8,01
77	15,97	19,90	18,33	20,01	16,84	20,26	22,46	36,00	17,34	9,99
78	16,57	20,83	19,03	20,83	17,72	21,12	23,52	37,49	18,31	10,44
79	16,13	20,15	18,52	20,23	17,08	20,49	22,75	36,40	17,60	10,11
80	13,91	16,79	15,93	17,25	13,95	17,32	18,90	30,96	14,13	8,47
81	15,74	19,54	18,05	19,70	16,51	19,92	22,05	35,42	16,96	9,81
82	23,03	31,27	26,58	29,70	27,80	30,68	35,49	53,73	29,82	15,48
83	22,38	30,18	25,81	28,79	26,73	29,70	34,23	52,06	28,57	14,95
84	30,94	45,01	35,87	40,82	41,63	42,88	51,32	74,19	46,16	22,03
85	12,92	15,32	14,78	15,92	12,60	15,93	17,23	28,55	12,66	7,75
86	12,06	14,07	13,77	14,78	11,46	14,73	15,80	26,47	11,43	7,13
87	33,17	49,05	38,50	44,00	45,80	46,41	55,99	80,06	51,18	23,95
88	19,09	24,81	21,97	24,26	21,51	24,81	28,07	43,77	22,59	12,37
89	19,19	24,97	22,09	24,40	21,66	24,95	28,26	44,01	22,76	12,44
90	12,83	15,19	14,67	15,80	12,48	15,80	17,08	28,33	12,53	7,68
91	19,17	24,94	22,06	24,37	21,63	24,92	28,22	43,96	22,72	12,43
92	17,21	21,82	19,77	21,68	18,65	22,04	24,65	39,05	19,36	10,92
93	17,02	21,52	19,55	21,43	18,37	21,77	24,31	38,59	19,04	10,78
94	24,66	34,02	28,49	31,96	30,52	33,16	38,65	57,89	32,99	16,80
95	13,03	15,48	14,90	16,07	12,74	16,08	17,41	28,81	12,82	7,83
96	17,72	22,63	20,37	22,39	19,42	22,79	25,58	40,34	20,22	11,31
97	9,60	10,62	10,93	11,56	8,39	11,37	11,89	20,63	8,16	5,43
98	19,32	25,17	22,23	24,57	21,85	25,13	28,48	44,32	22,98	12,54
99	11,78	13,66	13,45	14,41	11,10	14,34	15,34	25,79	11,04	6,93
100	29,87	43,10	34,61	39,30	39,68	41,21	49,11	71,39	43,82	21,13

Πίνακας 1.ϑ: Τιμές ξ_i^s σεναρίου δρομολόγησης ϑ

s	Σενάριο: ϑ									
	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10
1	27,44	23,07	13,75	18,37	28,75	19,38	20,12	28,31	26,44	28,66
2	20,79	17,90	10,94	13,93	22,48	14,18	15,26	21,82	20,12	21,99
3	14,68	13,02	8,22	9,86	16,51	9,58	10,79	15,75	14,29	15,78
4	31,00	25,79	15,20	20,74	32,03	22,24	22,72	31,74	29,81	32,19
5	27,86	23,39	13,92	18,65	29,14	19,71	20,42	28,71	26,84	29,07
6	13,04	11,68	7,46	8,76	14,86	8,38	9,59	14,09	12,72	14,10
7	17,53	15,32	9,51	11,76	19,32	11,70	12,88	18,60	17,02	18,69
8	12,56	11,29	7,23	8,44	14,38	8,04	9,24	13,61	12,26	13,60
9	11,60	10,49	6,77	7,79	13,39	7,34	8,54	12,63	11,33	12,60
10	44,29	35,74	20,38	29,58	43,95	33,24	32,40	44,35	42,34	45,24
11	17,69	15,44	9,58	11,86	19,47	11,82	12,99	18,76	17,16	18,85
12	27,48	23,10	13,77	18,40	28,79	19,41	20,15	28,35	26,48	28,70
13	23,64	20,13	12,16	15,83	25,19	16,38	17,34	24,62	22,83	24,86
14	21,10	18,14	11,08	14,14	22,78	14,42	15,49	22,13	20,42	22,31
15	13,09	11,72	7,48	8,79	14,91	8,41	9,63	14,14	12,76	14,14
16	13,28	11,88	7,57	8,92	15,10	8,55	9,77	14,33	12,94	14,34
17	24,89	21,10	12,69	16,67	26,37	17,37	18,26	25,84	24,02	26,11
18	33,52	27,70	16,21	22,42	34,33	24,28	24,55	34,15	32,19	34,68
19	9,28	8,55	5,64	6,24	10,99	5,71	6,83	10,24	9,10	10,18
20	13,69	12,21	7,76	9,19	15,52	8,85	10,07	14,75	13,34	14,77
21	18,84	16,35	10,09	12,63	20,59	12,69	13,83	19,90	18,26	20,02
22	32,33	26,80	15,73	21,62	33,25	23,31	23,68	33,01	31,07	33,51
23	25,96	21,92	13,13	17,38	27,36	18,20	19,03	26,87	25,03	27,17
24	29,22	24,43	14,48	19,56	30,40	20,81	21,42	30,03	28,13	30,43
25	22,82	19,49	11,82	15,29	24,41	15,75	16,74	23,82	22,06	24,04
26	13,61	12,15	7,73	9,14	15,44	8,79	10,01	14,67	13,26	14,68
27	19,38	16,78	10,33	12,99	21,12	13,10	14,23	20,43	18,78	20,57
28	35,59	29,26	17,03	23,79	36,20	25,98	26,06	36,13	34,15	36,72
29	22,17	18,98	11,54	14,85	23,79	15,24	16,26	23,17	21,43	23,38
30	12,11	10,91	7,02	8,13	13,91	7,71	8,91	13,14	11,82	13,13
31	37,95	31,03	17,95	25,36	38,32	27,93	27,78	38,37	36,37	39,04
32	25,07	21,23	12,76	16,79	26,53	17,50	18,38	26,01	24,19	26,29
33	28,19	23,64	14,06	18,87	29,44	19,98	20,66	29,03	27,15	29,40
34	48,22	38,62	21,85	32,19	47,39	36,58	35,25	48,02	46,03	49,06
35	16,22	14,26	8,92	10,88	18,03	10,71	11,92	17,29	15,76	17,35
36	15,32	13,54	8,51	10,28	17,14	10,05	11,26	16,39	14,90	16,43
37	6,95	6,57	4,44	4,68	8,50	4,12	5,12	7,81	6,84	7,73
38	21,91	18,78	11,43	14,68	23,55	15,04	16,08	22,92	21,19	23,12
39	26,73	22,52	13,46	17,90	28,09	18,82	19,60	27,62	25,77	27,95
40	20,36	17,56	10,76	13,65	22,06	13,85	14,95	21,40	19,71	21,56
41	20,68	17,81	10,90	13,86	22,37	14,09	15,18	21,71	20,02	21,88
42	30,83	25,66	15,13	20,63	31,88	22,10	22,59	31,58	29,65	32,03
43	24,67	20,93	12,60	16,52	26,16	17,19	18,09	25,62	23,81	25,89
44	24,57	20,85	12,56	16,46	26,07	17,11	18,02	25,52	23,72	25,79
45	19,93	17,22	10,57	13,36	21,65	13,52	14,64	20,98	19,31	21,13
46	20,16	17,40	10,67	13,51	21,87	13,69	14,80	21,20	19,52	21,35
47	32,27	26,75	15,71	21,58	33,19	23,26	23,64	32,95	31,01	33,44
48	19,74	17,07	10,49	13,23	21,46	13,37	14,49	20,79	19,12	20,93
49	17,13	15,00	9,33	11,49	18,93	11,40	12,59	18,20	16,64	18,29
50	16,19	14,24	8,91	10,86	18,00	10,69	11,90	17,26	15,73	17,32
51	19,51	16,89	10,39	13,08	21,24	13,19	14,32	20,56	18,90	20,70
52	22,32	19,10	11,60	14,96	23,94	15,36	16,38	23,33	21,58	23,54
53	25,66	21,70	13,01	17,18	27,09	17,97	18,82	26,59	24,75	26,88
54	21,76	18,66	11,36	14,58	23,41	14,93	15,97	22,78	21,05	22,97
55	17,81	15,53	9,64	11,95	19,59	11,91	13,08	18,88	17,28	18,97
56	10,14	9,28	6,06	6,82	11,89	6,31	7,47	11,13	9,93	11,09
57	26,88	22,64	13,52	18,00	28,23	18,94	19,71	27,77	25,91	28,10
58	13,38	11,96	7,62	8,98	15,20	8,62	9,84	14,43	13,04	14,44
59	19,17	16,62	10,24	12,85	20,92	12,94	14,08	20,23	18,58	20,36
60	34,46	28,41	16,58	23,04	35,18	25,05	25,23	35,05	33,08	35,60
61	22,92	19,56	11,86	15,35	24,50	15,82	16,81	23,91	22,15	24,13
62	14,46	12,84	8,12	9,70	16,28	9,41	10,63	15,52	14,07	15,55
63	27,88	23,41	13,93	18,66	29,16	19,73	20,44	28,74	26,86	29,10
64	18,31	15,93	9,86	12,28	20,08	12,28	13,44	19,37	17,75	19,48
65	16,68	14,63	9,13	11,19	18,49	11,06	12,26	17,75	16,20	17,83
66	35,24	29,00	16,89	23,56	35,89	25,70	25,81	35,80	33,82	36,38
67	27,56	23,16	13,80	18,45	28,86	19,48	20,20	28,43	26,55	28,78
68	81,74	62,59	33,73	54,44	75,68	66,32	59,62	78,78	77,38	81,16
69	12,88	11,55	7,98	8,85	14,70	8,26	9,47	13,93	12,56	13,93
70	20,65	17,79	10,88	13,84	22,34	14,07	15,16	21,69	19,99	21,85
71	24,85	21,07	12,67	16,64	26,33	17,33	18,23	25,80	23,98	26,07
72	36,54	29,97	17,40	24,42	37,05	26,76	26,75	37,03	35,04	37,65
73	18,44	16,04	9,92	12,37	20,21	12,38	13,54	19,50	17,88	19,61
74	40,98	33,29	19,12	27,38	41,03	30,46	29,99	41,24	39,23	42,01
75	22,14	18,95	11,52	14,83	23,76	15,22	16,25	23,15	21,40	23,35
76	15,12	13,38	8,42	10,15	16,95	9,90	11,12	16,19	14,71	16,23
77	19,41	16,81	10,34	13,01	21,15	13,12	14,25	20,46	18,81	20,60
78	20,41	17,59	10,78	13,68	22,11	13,88	14,98	21,44	19,76	21,60
79	19,68	17,02	10,46	13,19	21,41	13,32	14,45	20,73	19,06	20,87
80	16,10	14,17	8,87	10,81	17,92	10,63	11,84	17,18	15,65	17,24
81	19,03	16,50	10,17	12,76	20,78	12,83	13,97	20,08	18,44	20,21
82	31,85	26,44	15,54	21,31	32,81	22,93	23,33	32,56	30,62	33,04
83	30,63	25,51	15,05	20,50	31,70	21,94	22,45	31,39	29,46	31,83
84	47,48	38,09	21,58	31,70	46,75	35,96	34,72	47,34	45,35	48,35
85	14,57	12,93	8,17	9,78	16,40	9,50	10,71	15,64	14,18	15,67
86	13,27	11,87	7,56	8,91	15,09	8,54	9,76	14,32	12,93	14,33
87	52,18	41,52	23,32	34,82	50,83	39,99	38,14	51,72	49,75	52,89
88	24,72	20,96	12,62	16,55	26,20	17,23	18,13	25,67	23,85	25,93
89	24,89	21,10	12,69	16,67	26,36	17,36	18,25	25,83	24,02	26,11
90	14,43	12,82	8,11	9,69	16,26	9,39	10,61	15,50	14,05	15,52
91	24,85	21,07	12,67	16,64	26,33	17,33	18,23	25,80	23,98	26,07
92	21,47	18,43	11,24	14,39	23,12	14,70	15,75	22,49	20,77	22,67
93	21,15	18,18	11,10	14,17	22,82	14,45	15,52	22,18	20,46	22,35
94	34,94	28,77	16,77	23,36	35,61	25,44	25,58	35,50	33,53	36,08
95	14,73	13,06	8,25	9,89	16,56	9,62	10,83	15,80	14,34	15,83
96	22,34	19,11	11,61	14,97	23,96	15,37	16,39	23,35	21,60	23,56
97	9,75	8,95	5,87	6,56	11,48	6,04	7,18	10,73	9,55	10,68
98	25,11	21,26	12,78	16,81	26,57	17,53	18,41	26,04	24,22	26,32
99	12,85	11,53	7,37	8,63	14,67	8,24	9,45	13,90	12,53	13,90
100	45,28	36,47	20,75	30,24	44,82	34,08	33,12	45,28	43,28	46,20

Πίνακας 1.d: Τιμές ξ_i^S σεναρίου δρομολόγησης d

s	Σενάριο: d									
	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10
1	27,54	16,53	19,46	35,52	18,67	19,88	24,19	37,58	23,54	23,46
2	20,74	13,00	15,13	27,45	14,23	15,52	18,52	28,71	18,38	17,76
3	14,54	9,62	11,03	19,87	10,13	11,38	13,25	20,49	13,48	12,53
4	31,19	18,37	21,74	39,78	21,03	22,16	27,21	42,30	26,25	26,51
5	27,97	16,75	19,73	36,02	18,95	20,15	24,54	38,14	23,86	23,82
6	12,89	8,68	9,91	17,81	9,03	10,24	11,82	18,27	12,13	11,13
7	17,43	11,22	12,96	23,44	12,05	13,34	15,72	24,34	15,79	14,97
8	12,41	8,40	9,58	17,20	8,70	9,91	11,40	17,61	11,73	10,72
9	11,43	7,84	8,91	15,97	8,05	9,23	10,55	16,30	10,93	9,90
10	44,89	25,02	30,05	55,39	29,80	30,46	38,36	59,79	36,07	37,90
11	17,59	11,30	13,06	23,63	12,16	13,44	15,85	24,55	15,92	15,11
12	27,58	16,55	19,48	35,57	18,69	19,91	24,22	37,63	23,57	23,49
13	23,65	14,53	16,99	30,93	16,14	17,40	20,95	32,52	20,61	20,20
14	21,06	13,17	15,33	27,84	14,44	15,73	18,78	29,13	18,63	18,03
15	12,93	8,71	9,94	17,86	9,06	10,27	11,86	18,32	12,17	11,17
16	13,12	8,82	10,07	18,10	9,19	10,41	12,02	18,58	12,32	11,33
17	24,93	15,19	17,81	32,45	16,97	18,23	22,02	34,19	21,58	21,28
18	33,78	19,66	23,33	42,77	22,70	23,76	29,33	45,63	28,14	28,67
19	9,10	6,46	7,27	12,98	6,47	7,56	8,51	13,12	8,95	7,91
20	13,54	9,05	10,35	18,63	9,47	10,70	12,38	19,15	12,67	11,69
21	18,76	11,84	13,83	25,05	12,93	14,22	16,84	26,09	16,84	16,09
22	32,55	19,05	22,58	41,36	21,91	23,01	28,33	44,06	27,25	27,65
23	26,02	15,75	18,50	33,73	17,68	18,92	22,93	35,60	22,40	22,18
24	29,37	17,46	20,60	37,66	19,85	21,03	25,70	39,95	24,90	24,99
25	22,82	14,09	16,46	29,93	15,59	16,87	20,26	31,43	19,97	19,50
26	13,46	9,01	10,30	18,53	9,41	10,64	12,31	19,04	12,60	11,62
27	19,31	12,23	14,19	25,72	13,29	14,58	17,31	26,82	17,27	16,56
28	35,91	20,71	24,64	45,22	24,07	25,07	31,07	48,36	29,68	30,44
29	22,15	13,74	16,03	29,13	15,15	16,43	19,69	30,55	19,46	18,94
30	11,94	8,14	9,26	16,61	8,39	9,58	11,00	16,99	11,35	10,33
31	38,34	21,89	26,11	47,99	25,62	26,54	33,05	51,46	31,43	32,46
32	25,11	15,28	17,92	32,66	17,09	18,34	22,17	34,42	21,72	21,42
33	28,30	16,92	19,94	36,42	19,17	20,36	24,82	38,57	24,11	24,10
34	48,96	26,93	32,45	59,94	32,38	32,86	41,63	64,92	38,91	41,27
35	16,10	10,48	12,07	21,80	11,17	12,44	14,58	22,56	14,73	13,85
36	15,19	9,98	11,46	20,67	10,56	11,82	13,80	21,35	14,00	13,08
37	6,77	5,03	5,59	9,92	4,88	5,84	6,44	9,91	6,92	5,92
38	21,89	13,60	15,86	28,82	14,98	16,27	19,48	30,21	19,26	18,72
39	26,81	16,16	19,00	34,66	18,20	19,42	23,59	36,64	23,00	22,85
40	20,31	12,77	14,84	26,92	13,95	15,24	18,15	28,13	18,04	17,39
41	20,63	12,94	15,05	27,31	14,16	15,45	18,42	28,56	18,29	17,67
42	31,02	18,29	21,63	39,58	20,92	22,06	27,06	42,08	26,12	26,37
43	24,70	15,07	17,66	32,17	16,82	18,08	21,83	33,89	21,41	21,08
44	24,60	15,02	17,60	32,06	16,76	18,02	21,75	33,76	21,33	21,00
45	19,87	12,53	14,56	26,40	13,66	14,95	17,78	27,56	17,71	17,03
46	20,10	12,66	14,71	26,68	13,81	15,10	17,97	27,86	17,88	17,22
47	32,49	19,02	22,54	41,28	21,87	22,97	28,27	43,98	27,20	27,59
48	19,67	12,43	14,43	26,16	13,53	14,82	17,61	27,30	17,55	16,86
49	17,03	10,99	12,69	22,94	11,78	13,06	15,37	23,80	15,47	14,63
50	16,07	10,47	12,05	21,76	11,15	12,42	14,55	22,52	14,71	13,82
51	19,44	12,30	14,28	25,88	13,38	14,67	17,42	26,99	17,37	16,66
52	22,31	13,83	16,13	29,33	15,26	16,54	19,83	30,76	19,59	19,07
53	25,72	15,60	18,31	33,38	17,49	18,73	22,68	35,22	22,18	21,94
54	21,74	13,52	15,77	28,64	14,89	16,17	19,35	30,02	19,15	18,60
55	17,71	11,37	13,14	23,78	12,24	13,52	15,95	24,71	16,01	15,21
56	9,97	6,98	7,88	14,09	7,06	8,18	9,27	14,31	9,69	8,65
57	26,96	16,24	19,10	34,85	18,30	19,52	23,71	36,84	23,11	22,98
58	13,23	8,87	10,14	18,23	9,25	10,48	12,11	18,72	12,41	11,42
59	19,10	12,12	14,05	25,46	13,15	14,44	17,13	26,54	17,10	16,38
60	34,74	20,13	23,92	43,88	23,32	24,35	30,12	46,86	28,84	29,47
61	22,91	14,14	16,52	30,05	15,66	16,93	20,34	31,56	20,05	19,58
62	14,31	9,49	10,88	19,59	9,98	11,23	13,05	20,18	13,29	12,34
63	27,99	16,76	19,74	36,05	18,96	20,16	24,56	38,17	23,88	23,84
64	18,22	11,64	13,48	24,39	12,57	13,86	16,38	25,38	16,41	15,63
65	16,57	10,74	12,39	22,38	11,48	12,76	14,98	23,19	15,11	14,25
66	35,55	20,53	24,42	44,81	23,84	24,85	30,78	47,90	29,42	30,14
67	27,66	16,59	19,54	35,66	18,75	19,96	24,29	37,74	23,63	23,56
68	83,91	42,54	52,40	97,85	54,22	52,60	69,21	108,33	62,29	70,05
69	12,72	8,58	9,79	17,60	8,91	10,13	11,67	18,04	11,99	10,99
70	20,60	12,92	15,03	27,28	14,14	15,43	18,40	28,52	18,27	17,64
71	24,89	15,17	17,78	32,40	16,95	18,20	21,99	34,14	21,55	21,24
72	36,88	21,18	25,23	46,33	24,69	25,66	31,87	49,61	30,38	31,25
73	18,35	11,72	13,57	24,56	12,66	13,95	16,50	25,56	16,52	15,75
74	41,47	23,40	28,00	51,55	27,62	28,43	35,60	55,45	33,66	35,07
75	22,12	13,73	16,01	29,10	15,14	16,42	19,67	30,51	19,44	18,92
76	14,99	9,87	11,33	20,43	10,43	11,69	13,63	21,09	13,84	12,91
77	19,34	12,25	14,21	25,75	13,31	14,60	17,33	26,86	17,29	16,58
78	20,35	12,79	14,87	26,98	13,98	15,27	18,19	28,20	18,08	17,43
79	19,61	12,40	14,39	26,09	13,49	14,78	17,56	27,22	17,50	16,81
80	15,98	10,42	12,00	21,66	11,09	12,36	14,48	22,41	14,64	13,75
81	18,95	12,04	13,96	25,28	13,05	14,34	17,00	26,34	16,98	16,25
82	32,06	18,81	22,28	40,79	21,59	22,71	27,92	43,43	26,89	27,24
83	30,81	18,18	21,50	39,34	20,79	21,93	26,90	41,82	25,97	26,19
84	48,20	26,58	32,01	59,09	31,90	32,41	41,02	63,97	38,38	40,64
85	14,43	9,55	10,95	19,73	10,06	11,31	13,15	20,34	13,39	12,44
86	13,12	8,81	10,06	18,09	9,18	10,40	12,01	18,57	12,32	11,32
87	53,06	28,84	34,87	64,50	34,97	35,25	44,91	70,09	41,75	44,67
88	24,75	15,10	17,70	32,23	16,85	18,11	21,87	33,95	21,45	21,12
89	24,92	15,19	17,81	32,44	16,97	18,22	22,02	34,18	21,58	21,27
90	14,29	9,48	10,86	19,56	9,96	11,21	13,03	20,15	13,27	12,32
91	24,89	15,17	17,78	32,40	16,95	18,20	21,99	34,14	21,55	21,24
92	21,43	13,36	15,57	28,28	14,69	15,97	19,10	29,62	18,91	18,34
93	21,11	13,19	15,36	27,89	14,48	15,76	18,82	29,19	18,67	18,07
94	35,24	20,38	24,23	44,45	23,63	24,65	30,52	47,50	29,20	29,88
95	14,60	9,65	11,07	19,94	10,17	11,42	13,29	20,56	13,52	12,58
96	22,33	13,84	16,15	29,35	15,27	16,55	19,85	30,79	19,60	19,09
97	9,58	6,75	7,61	13,59	6,79	7,90	8,93	13,77	9,36	8,31
98	25,15	15,31	17,95	32,70	17,11	18,36	22,20	34,47	21,75	21,46
99	12,69	8,57	9,77	17,56	8,90	10,11	11,65	18,00	11,97	10,97
100	45,92	25,51	30,66	56,55	30,45	31,07	39,18	61,09	36,79	38,75

Απόσπασμα κώδικα 1.1: trip_update_concatenator.py

```
import pandas as pd
import os
import numpy as np
from datetime import datetime, timedelta

#Define dates of data
collection_days = 169
final_collection_day = datetime(2024, 9, 11)
collection_dates = [((final_collection_day - timedelta(days=(collection_days - i - 1))).day, (final_collection_day - timedelta(days=(collection_days - i - 1))).month) for i in range(collection_days)]

#Define the names of the trip update files
dirname = os.path.dirname(__file__)
tu_csv_dirname = os.path.join(dirname, 'trip_updates_csvs')
tu_csv_files = [f"TU_{collection_dates[day][0]}_{collection_dates[day][1]}.csv"
for day in range(collection_days)]
trip_list = []
trip_times = []
trip_day = []
trip_lengths = []

for tu_file in tu_csv_files:
    tu_filename = os.path.join(tu_csv_dirname, tu_file)
    df_up = pd.read_csv(tu_filename)
    # print(df_tu.head())

    #Creates a list of all unique trips
    trip_list_temp = []

    for ind, trip in enumerate(df_up['trip.tripId']):
        if ind == 0: trip_list_temp.append(trip)
        elif trip != trip_list_temp[-1]: trip_list_temp.append(trip)
        elif trip == []: continue

    # print(trip_list)
    # print(int(len(trip_list)))

    #Finds trip times for every trip
    print(tu_file, 'Finding trip times...')
    min_dep_time = [10000000000] * int(len(trip_list_temp))
```

```

max_arr_time = [-1] * int(len(trip_list_temp))

for indu, tripu in enumerate(df_up['trip.tripId']):
    for indl, tripl in enumerate(trip_list_temp):
        if tripl == tripu:
            if df_up.iloc[indu, 19] < min_dep_time[indl] and df_up.iloc[indu,
19] != 0: min_dep_time[indl] = df_up.iloc[indu, 19]
            if df_up.iloc[indu, 16] > max_arr_time[indl] and df_up.iloc[indu,
16] != 0: max_arr_time[indl] = df_up.iloc[indu, 16]

# print(min_dep_time)
# print(max_arr_time)

#Finds trips with only one stop and deletes them
trips_to_delete = []
for i, mdt in enumerate(min_dep_time):
    if mdt == 10000000000 or max_arr_time[i] == -1 or max_arr_time[i] < mdt:
trips_to_delete.append(i)

items_deleted = 0
for ttd in trips_to_delete:
    del trip_list_temp[ttd - items_deleted]
    del min_dep_time[ttd - items_deleted]
    del max_arr_time[ttd - items_deleted]
    items_deleted += 1

trip_times_temp = [mar - mdt for (mar, mdt) in zip(max_arr_time,
min_dep_time)]

tu_day_temp = tu_file.replace('.csv','')
tu_day = tu_day_temp.replace('TU_','')
trip_day_temp = [tu_day] * int(len(trip_times_temp))

# print(trip_times)

#-----Compute trip length from static gtfs data-----
print(tu_file, 'Computing trip lengths...')
trip_lengths_temp = [None] * int(len(trip_list_temp))

#Construct path of relevant stop_times.txt file, open it and make a pandas
dataframe out of it
static_dirname_temp = 'data sources\GTFS_KRK_A_' + tu_day

```

```

static_data_dirname = os.path.join(dirname, static_dirname_temp)
stop_times_data_filename = os.path.join(static_data_dirname, 'stop_times.txt')
df_st = pd.read_csv(stop_times_data_filename)

#For every trip in stop_times.txt find its length
static_trips = []
stops_temp = []
static_trip_dist = []
dist_temp = []

for ind, stop_seq in enumerate(df_st['stop_sequence']):
    stops_temp.append(stop_seq)
    dist_temp.append(df_st.iloc[ind, 8])

    if stops_temp[-1] == 1 and int(len(stops_temp)) > 1:
        static_trips.append(df_st.iloc[ind-1, 0])
        static_trip_dist.append(dist_temp[-2])
        stops_temp = [1]
        dist_temp = [0.00]

#Keep the lengths of the trips that are available from real-time data
print(tu_file, 'Matching trip lengths to trips from real-time data...')
for indu, tripu in enumerate(trip_list_temp):
    for indst, tripst in enumerate(static_trips):
        if tripu == tripst: trip_lengths_temp[indu] = static_trip_dist[indst]

#Delete trips that have no length
trips_to_delete = []
for i, trip in enumerate(trip_list_temp):
    if trip_lengths_temp[i] == "" or trip_lengths_temp[i] == None:
trips_to_delete.append(i)

items_deleted = 0
for ttd in trips_to_delete:
    del trip_list_temp[ttd - items_deleted]
    del trip_times_temp[ttd - items_deleted]
    del trip_day_temp[ttd - items_deleted]
    del trip_lengths_temp[ttd - items_deleted]
    items_deleted += 1

trip_list.extend(trip_list_temp), trip_times.extend(trip_times_temp),
trip_day.extend(trip_day_temp), trip_lengths.extend(trip_lengths_temp)

```

```

#Create a new dataframe with a column for the trip_ids, a column for their
respective trip times, one for their lengths and one for the day of the trips
trip_data = zip(trip_list, trip_times, trip_lengths, trip_day)
df_trp = pd.DataFrame(trip_data, columns=['trip_id', 'trip_duration (sec)',
'trip_length (km)', 'trip_day'])
df_trp.to_csv('trip_times_conc.csv', index=False)
print('Done!')

```

Απόσπασμα κώδικα 1.2: statistics_gabagool.py

```

"I am creator of pain, destroyer of data"
import pandas as pd
import numpy as np
from scipy import stats

df_tr = pd.read_csv("trip_times_conc.csv")
df_tr["trip_id"] = df_tr["trip_id"].str[:-10]

#Spot unique trips
print("Spotting unique trips...")
unique_trips = []
trip_counter = []

for trip in df_tr['trip_id']:
    trip_spotted = False
    for un_ind, un_trip in enumerate(unique_trips):
        if un_trip == trip:
            trip_counter[un_ind] += 1
            trip_spotted = True
    if not trip_spotted: unique_trips.append(trip), trip_counter.append(1)

# print(unique_trips)

#Spot trip times of unique trips. Compute average trip lengths & normalized trip
times
trip_times = []
norm_trip_times = []
mean_trip_lengths = []
year = 2024

print('Processing unique trip data...')

```



```

for i, un_trip in enumerate(unique_trips):
    trip_times_temp = []
    trip_lengths_temp = []
    norm_times_temp = []
    trip_day = []
    for df_ind, df_trip in enumerate(df_tr["trip_id"]):
        if un_trip == df_trip:
            trip_times_temp.append(df_tr.iloc[df_ind, 1])
            trip_lengths_temp.append(df_tr.iloc[df_ind, 2])
    trip_times.append(trip_times_temp)
    average_trip_length = np.mean(np.array(trip_lengths_temp))
    norm_times_temp = [int(trip_tm * trip_ln / average_trip_length) for (trip_tm,
trip_ln) in zip(trip_times_temp, trip_lengths_temp)]
    norm_trip_times.append(norm_times_temp)
    mean_trip_lengths.append(average_trip_length)

#Test for goodness of fit of normalized trip times, by checking
#if the natural logarithm of each trip's normalized trip times
#follows a normal distribution

normal_pValue = ["0.000"] * int(len(norm_trip_times))
shapiro_pValue = ["0.000"] * int(len(norm_trip_times))
# jarqueBera_pValue = ["0.000"] * int(len(norm_trip_times))
trip_score = [0.0] * int(len(norm_trip_times))
trip_times_scale = ["0.000"] * int(len(norm_trip_times))
trip_times_shape = ["0.000"] * int(len(norm_trip_times))

print("Testing for goodness of fit of normalized trip times...")
for ind, times in enumerate(norm_trip_times):
    if trip_counter[ind] > 71:
        normal_pValue_result = stats.normaltest(np.log(times)).pvalue
        normal_pValue[ind] = f"{normal_pValue_result:.3f}"
        shapiro_pValue_result = stats.shapiro(np.log(times)).pvalue
        shapiro_pValue[ind] = f"{shapiro_pValue_result:.3f}"
        # jarqueBera_result = stats.jarque_bera(np.log(times))
        # jarqueBera_pValue[ind] = f"{jarqueBera_result.pvalue:.3f}"
        trip_score[ind] = normal_pValue_result*10 + shapiro_pValue_result*10
        shape, loc, scale = stats.lognorm.fit(times, floc=0) #No travel time is
negative, so we want a clean log-normal distribution, thus loc is set to 0
        trip_times_shape[ind], trip_times_scale[ind] = f"{shape:.3f}",
f"{scale:.3f}"

```

```

#Sort data based on trip score and write it to a csv
print("Printing data...")
# output_data = zip(unique_trips, trip_score, normal_pValue, shapiro_pValue,
jarqueBera_pValue, trip_times_shape, trip_times_scale)
# df_out = pd.DataFrame(output_data, columns=['trip_id', 'trip_score',
'normal_test_pValue', 'Shapiro-Wilk_pValue', 'Jarque-Bera_pValue',
't_tilde_shape', 't_tilde_scale'])
output_data = zip(unique_trips, trip_score, normal_pValue, shapiro_pValue,
trip_times_shape, trip_times_scale)
df_out = pd.DataFrame(output_data, columns=['trip_id', 'trip_score',
'normal_test_pValue', 'Shapiro-Wilk_pValue', 't_tilde_shape', 't_tilde_scale'])
df_out.sort_values(by=['trip_score'], inplace=True, ascending=False)
df_out['trip_score'] = df_out['trip_score'].map(lambda score: f'{score:.2f}')
df_out.to_csv('trip_statistics.csv', index=False)

print('Done!')

```

Απόσπασμα κώδικα 1.3: trip_parameters_generator.py

```

"Generate the data files that will be used by the EBMDVSP model, using the
existing data files and the trip_statistics.csv file"
import numpy as np

if __name__ == "__main__":
    import pandas as pd
    import os

    scenarios = ['a', 'b', 'c', 'd']

    num_ofVeh = 2 #Number of vehicles
    num_ofTrips = 10 #Number of trips
    num_ofCharg = 8 #Number of charging events

    df_stat = pd.read_csv("trip_statistics.csv", nrows=int(len(scenarios)) *
num_ofTrips)

    # #Create the coordinates of the start and end locations of the trips
    # start_lats = [0] * int(len(df_stat['trip_id']))
    # start_lons = [0] * int(len(df_stat['trip_id']))
    # end_lats = [0] * int(len(df_stat['trip_id']))
    # end_lons = [0] * int(len(df_stat['trip_id']))
    # for i, trip in enumerate(df_stat['trip_id']):

```

```

#     start_lats[i], start_lons[i], end_lats[i], end_lons[i] =
generate_trip_coordinates(df_stat.iloc[i, 5])

#Assign each trip to a scenario
scenario_assignments: list[str] = [" "] * int(len(df_stat))
assingments_per_scenario: int = int(int(len(scenario_assignments)) /
int(len(scenarios)))
count = 0
for i, scenario in enumerate(scenarios):
    for j in range(assingments_per_scenario):
        scenario_assignments[count] = scenario
        count += 1
np.random.shuffle(scenario_assignments)
df_stat['scenario'] = scenario_assignments

#Create the trip parameter file for each scenario
for scenario in scenarios:
    #Define relevant filenames
    data_filename = f"D2_S2_C{num_ofTrips}_{scenario}_trips.txt"
    current_directory = os.path.dirname(__file__)
    old_data_folder = os.path.join(current_directory, 'old data')
    new_data_foler = os.path.join(current_directory, 'Data')
    old_data_path = os.path.join(old_data_folder, data_filename)
    new_data_path = os.path.join(new_data_foler, data_filename)

    #Load old data to be recycled
    header_data_int = np.loadtxt(old_data_path, max_rows=1, dtype=int,
converters=float)
    header_data_flt = np.loadtxt(old_data_path, max_rows=1, dtype=float)
    depot_data = np.loadtxt(old_data_path, skiprows=1, max_rows=num_ofVeh * 2,
dtype=int)
    trip_data = np.loadtxt(old_data_path, skiprows=(1 + num_ofVeh*2),
max_rows=num_ofTrips, dtype=int)
    charg_data = np.loadtxt(old_data_path, skiprows=(1 + num_ofVeh*2 +
num_ofTrips), max_rows=num_ofCharg, dtype=int)

    #Write new data
    with open(new_data_path, 'w') as file:
        file.write(f'{header_data_int[0]} {header_data_int[1]}
{header_data_int[2]} {header_data_int[3]} {header_data_int[4]}
{header_data_int[5]} {header_data_int[6]} {header_data_int[7]}
{header_data_flt[8]}\n')

```

```

        for i in range(num_ofVeh*2):
            for j in range(7): file.write(f'{depot_data[i][j]} ')
            file.write('\n')
        trip_count = 0
        for i, t_shape in enumerate(df_stat['t_tilde_shape']):
            if scenario == df_stat.iloc[i, -1]:
                trip_count += 1
                file.write(f'{trip_count} {trip_data[trip_count-1, 1]}
{trip_data[trip_count-1, 2]} {trip_data[trip_count-1, 3]} {trip_data[trip_count-1,
4]} {trip_data[trip_count-1, 5]} {trip_data[trip_count-1, 6]} {t_shape:.3f}
{df_stat.iloc[i, 7]:.3f}\n')
            for i in range(num_ofCharg):
                for j in range(7): file.write(f'{charg_data[i][j]} ')
                file.write('\n')

```

Απόσπασμα κώδικα 2.1: EB-MDVSPTW_Vlady_Chance_Constraints.py

```

import gurobipy as gp #import gurobipy library in Python as gp
from gurobipy import GRB
import pandas as pd #import pandas library as pd. It offers data structures and
operations for manipulating numerical tables and time series
import numpy as np #import numpy library. It adds support for large, multi-
dimensional arrays and matrices
import os #provides functions for interacting with the operating system
import ast #library that processes trees of the Python abstract syntax grammar
import math
import vlady_tools as vl
import copy

print(gp.gurobi.version())

#Initialize the Gurobi model
model = gp.Model()

#####
# INPUT
#####

dirname = os.path.dirname(__file__)
charging_event_filename = os.path.join(dirname,
'Data/D2_S2_C10_charging_event_sequence.txt')
data_header_charg_event=np.loadtxt(charging_event_filename,max_rows=1,dtype=int)

```

```

data_main_body_charg_event=np.loadtxt(charging_event_filename,skiprows=1,dtype=int
)
F_end = data_header_charg_event #last charging events at each charger
omega={}
for i in range(0,len(data_main_body_charg_event)):
    omega[data_main_body_charg_event[i,0]] = data_main_body_charg_event[i,1]

trips_filename = os.path.join(dirname, 'Data/D2_S2_C10_d_trips.txt')
data_header=np.loadtxt(trips_filename,max_rows=1,dtype=int, converters=float)
data_header_decimal=np.loadtxt(trips_filename,max_rows=1,dtype=float)
# data_main_body=np.loadtxt(trips_filename,skiprows=1,dtype=int)
Vehicles=data_header[0]; Trips=data_header[1]; Charging_Events=data_header[2];
greek_l=data_header[3]; p_max=data_header[4]; p_min=data_header[5];
travel_cost=data_header[6]
r=data_header_decimal[7]; e_consumption = data_header_decimal[8] #kWh per km

depot_data = np.loadtxt(trips_filename, skiprows=1, max_rows=Vehicles*2,
dtype=int)
trip_data_int = np.loadtxt(trips_filename, skiprows=(1 + Vehicles*2),
max_rows=Trips, dtype=int, converters=float)
trip_data_decimal = np.loadtxt(trips_filename, skiprows=(1 + Vehicles*2),
max_rows=Trips, dtype=float)
charging_events_data = np.loadtxt(trips_filename, skiprows=(1 + Vehicles*2 +
Trips), max_rows=Charging_Events, dtype=int)

r=float(r) #charging rate in kWh of energy per minute

inverse_r=float(1/r)
K=tuple(np.arange(1,Vehicles+1))
phi_max={k:p_max for k in K}# F max- kWh
phi_min={k:p_min for k in K}# F min-- kWh
O={}; D={}; l={}; u={}; O_N={}; D_N={}; N=[]; mi={}; ksi={}
for k in K:
    j = k
    k -= 1
    O[j] = depot_data[k,0]
    D[j] = depot_data[k+Vehicles,0]
    l[O[j]] = depot_data[k,5]; u[O[j]]=depot_data[k,6]
    l[D[j]] = depot_data[k+Vehicles,5]; u[D[j]] = depot_data[k+Vehicles,6]
    O_N[O[j]] = [depot_data[k,1], depot_data[k,2]]
    D_N[D[j]] = [depot_data[k,3], depot_data[k,4]]
    O_N[D[j]] = [depot_data[k+Vehicles,1], depot_data[k+Vehicles,2]]

```

```

    D_N[D[j]] = [depot_data[k+Vehicles,3], depot_data[k+Vehicles,4]]
    N.append(O[j]);N.append(D[j])
V_dict={}; V=[]; j=0
for i in range(Trips):
    j += 1
    V_dict[j] = trip_data_int[i,0]
    l[V_dict[j]] = trip_data_int[i,5]; u[V_dict[j]] = trip_data_int[i,6]
    O_N[V_dict[j]] = [trip_data_int[i,1], trip_data_int[i,2]]
    D_N[V_dict[j]] = [trip_data_int[i,3], trip_data_int[i,4]]
    l[V_dict[j]] = trip_data_int[i,5]; u[V_dict[j]] = trip_data_int[i,6]
    mi[V_dict[j]] = np.log(trip_data_decimal[i,8]); ksi[V_dict[j]] =
trip_data_decimal[i,7]
    N.append(V_dict[j]); V.append(V_dict[j])
F_dict={}; F=[]; j=0
for i in range(Charging_Events):
    j=j+1
    F_dict[j] = charging_events_data[i,0]
    l[F_dict[j]] = charging_events_data[i,5]; u[F_dict[j]] =
charging_events_data[i,6]
    O_N[F_dict[j]] = [charging_events_data[i,1], charging_events_data[i,2]]
    D_N[F_dict[j]] = [charging_events_data[i,3], charging_events_data[i,4]]
    l[F_dict[j]] = charging_events_data[i,5]; u[F_dict[j]] =
charging_events_data[i,6]
    N.append(F_dict[j]);F.append(F_dict[j])

F_no_end = [] #charging events that are not the last ones in their charger
for i in F:
    if i not in F_end:
        F_no_end.append(i)

Nk={};Vk={}
for k in K:
    Nk[k]=V+F+[O[k],D[k]]
    Vk[k]=V

#####
t_tilde={} #travel time to complete trip i
eta={} #consumed energy when performing task i
S = 100 #Scenarios of t_tilde for each trip, based on a log-normal dist

from scipy.spatial import distance

```

```

for i in V:
    latitude_of_node_i_start=O_N[i][0]
    longitude_of_node_i_start=O_N[i][1]
    latitude_of_node_i_end=D_N[i][0]
    longitude_of_node_i_end=D_N[i][1]
    # mean_t_tilde = math.e *
distance.euclidean([latitude_of_node_i_start,longitude_of_node_i_start],[latitude_
of_node_i_end,longitude_of_node_i_end])
    # stdv_t_tilde = 0.25*mean_t_tilde

    t_tilde[i] = vl.generate_trip_scenarios(mi[i], ksi[i], S)
    # t_tilde[i] =
distance.euclidean([latitude_of_node_i_start,longitude_of_node_i_start],[latitude_
of_node_i_end,longitude_of_node_i_end])
    eta[i] =
e_consumption*distance.euclidean([latitude_of_node_i_start,longitude_of_node_i_sta
rt],[latitude_of_node_i_end,longitude_of_node_i_end])

# print(t_tilde)

#Create S^a_i, a subset of S, for every trip i in V, that contains the indices of
t_tilde_i, up until the ath percentile
a = 0.8
Sai = []
a_instances = int(S - a*S)
tt_copy = copy.deepcopy(t_tilde)

for i in V:
    AntiSai_temp = []
    max_tt = max(tt_copy[i])
    items_retrieved = 0
    for a_inst in range(a_instances):
        for s, ttc in enumerate(tt_copy[i]):
            if ttc == max_tt:
                AntiSai_temp.append(s + items_retrieved)
            del tt_copy[i][AntiSai_temp[-1] - items_retrieved]
            items_retrieved += 1
            max_tt = max(tt_copy[i])

    Sai_temp = [s for s in range(S)]
    items_deleted = 0
    for antis in AntiSai_temp:

```

```

        del Sai_temp[antis - items_deleted]
        items_deleted += 1
    Sai.append(Sai_temp)

t={} #travel time between the end location of task i and the start location of
task j
bijk={} #travel cost from i to j
theta={} #consumed energy when deadheading from task i to task j

for i in N:
    for j in N:
        latitude_of_node_i_end=D_N[i][0]
        longitude_of_node_i_end=D_N[i][1]
        latitude_of_node_j_start=O_N[j][0]
        longitude_of_node_j_start = O_N[j][1]
        t[i,j]=distance.euclidean([latitude_of_node_i_end,longitude_of_node_i_end]
,[latitude_of_node_j_start,longitude_of_node_j_start])
        bijk[i,j]=travel_cost*t[i,j]
        theta[i,j] = e_consumption * distance.euclidean([latitude_of_node_i_end,
longitude_of_node_i_end],[latitude_of_node_j_start,longitude_of_node_j_start])
        if i==j:
            t[i,j]=0; theta[i,j]=0

A={}
for k in K:
    A_a=[(O[k],j) for j in Nk[k] if j!=O[k] if u[j]>=l[O[k]]+t[O[k],j]]
#arcs_from_origin_depot
    A_b=[(i,D[k]) for i in Nk[k] if i not in [O[k],D[k]]]
#arcs_to_destination_depot
    A_c=[(i,j) for i in Vk[k] for j in Vk[k] if i!=j if l[i]+t[i,j]<=u[j]]
#arcs_from_trip_to_trip
    A_d=[(i,j) for i in Vk[k] for j in F if l[i]+t[i,j]<=u[j]]
#arcs_from_trip_to_charging event #όχι δεν θέλω να έχω πολλά σενάρια για τους
χρόνους φόρτισης
    A_f=[(i,j) for i in F for j in Vk[k] if l[i]+t[i,j]<=u[j]]
#arcs_from_chargingevent_to_trip
    A[k]=A_a+A_b+A_c+A_d+A_f
    A_a.clear();A_b.clear();A_c.clear();A_d.clear();A_f.clear()

#A={1:A1_a+A1_b+A1_c+A1_d+A1_f,2:A2_a+A2_b+A2_c+A2_d+A2_f} #possible arcs per
vehicle

```



```

q={i:0 for i in V} #closest charging node from the end of trip i
for i in V:
    distance=np.infty
    for j in F:
        if t[i,j]<=distance:
            distance=t[i,j]
            q[i]=j

M=100000 #very large positive number

#VARIABLES

x={}; sigma={}; sigma_tilde={}; z={}

for k in K:
    for i,j in A[k]:
        x[i,j,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.BINARY, name='x%s' % str([i,j,k]))
#binary flow variable where xijk=1 if vehicle k uses arc ij
        sigma[i,j,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-2 * M, ub=+2 * M,
            name='sigma%s' % str([i,j,k])) # binary flow variable
where xijk=1 if vehicle k uses arc ij
        sigma_tilde[i,j,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-2 * M,
ub=+2 * M,
            name='sigma_tilde%s' % str([i,j,k])) # binary
flow variable where xijk=1 if vehicle k uses arc ij
        if i in Vk[k]+F+[O[k]]:
            for s in range(S):
                z[i,j,k,s] = model.addVar(vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-
10000000000,name='z%s' % str([i,j,k,s])) # objective function

T={}; e={}; e_bar={}; g={}
for k in K:
    for i in Nk[k]:
        T[i,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, name='T%s' % str([i,k]))
    for i in Vk[k]+F+[D[k]]:
        e[i,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-10000000000, name='e%s'
% str([i,k])) #SOC of vehicle k when it arrives at node task i
    for i in Vk[k]+F+[O[k]]:
        e_bar[i,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-10000000000,
name='e_bar%s' % str([i,k])) #SOC of vehicle k when it completes task i
    for i in Vk[k]+F:

```

```

    g[i,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-1000000000, name='g%s'
% str([i,k])) # SOC change of vehicle k when performing node task i

tau = model.addVars(F,K,vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-1000000000, name='tau')
#required time period to recharge vehicle k at charging event i
s_tilde = model.addVars(F,K,vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-1000000000,
name='s_tilde')
y = model.addVars(F,K,vtype=gp.GRB.BINARY, name='y')

#CONSTRAINTS
model.addConstrs(z[i,j,k,s]<=M*x[i,j,k] for s in range(S) for k in K for i,j in
A[k] if i in Vk[k]+F+[O[k]]) #eq.(1)
model.addConstrs(z[i,j,k,s]>=-M*x[i,j,k] for s in range(S) for k in K for i,j in
A[k] if i in Vk[k]+F+[O[k]]) #eq.(2)
model.addConstrs(z[i,j,k,s]<=bijk[i,j]+greek_1*(T[j,k]-
(T[i,k]+t_tilde[i][s]+t[i,j]))+M*(1-x[i,j,k]) for s in range(S) for k in K for i,j
in A[k] if i in Vk[k]) #eq.(3,4a)
model.addConstrs(z[i,j,k,s]<=bijk[i,j]+greek_1*(T[j,k]-(T[i,k]+t[i,j]))+M*(1-
x[i,j,k]) for s in range(S) for k in K for i,j in A[k] if i==O[k]) #eq.(3,4b)
model.addConstrs(z[i,j,k,s]<=bijk[i,j]+greek_1*(T[j,k]-
(T[i,k]+tau[i,k]+t[i,j]))+M*(1-x[i,j,k]) for s in range(S) for k in K for i,j in
A[k] if i in F) #eq.(3,4c))
model.addConstrs(z[i,j,k,s]>=bijk[i,j]+greek_1*(T[j,k]-
(T[i,k]+t_tilde[i][s]+t[i,j]))-(1-x[i,j,k])*M for s in range(S) for k in K for i,j
in A[k] if i in Vk[k]) #eq.(5,6a)
model.addConstrs(z[i,j,k,s]>=bijk[i,j]+greek_1*(T[j,k]-(T[i,k]+t[i,j]))-(1-
x[i,j,k])*M for s in range(S) for k in K for i,j in A[k] if i==O[k]) #eq.(5,6b)
model.addConstrs(z[i,j,k,s]>=bijk[i,j]+greek_1*(T[j,k]-(T[i,k]+tau[i,k]+t[i,j]))-
(1-x[i,j,k])*M for s in range(S) for k in K for i,j in A[k] if i in F) #eq.(5,6c)

model.addConstrs( sum( sum ( x[i,j,k] for i,j in A[k] if j==jj) for k in K ) == 1
for jj in V) # eq.(7)
model.addConstrs( sum( sum ( x[i,j,k] for i,j in A[k] if j==jj) for k in K ) <= 1
for jj in F) # eq.(8)

model.addConstrs(sum(x[i, j, k] for i, j in A[k] if i == O[k]) == 1 for k in K) #
eq.(9a)
model.addConstrs(sum(x[i, j, k] for i, j in A[k] if j == D[k]) == 1 for k in K) #
eq.(9b)

model.addConstrs( sum(x[i,j,k] for i,j in A[k] if j==jj) == sum(x[j,i,k] for j,i
in A[k] if j==jj) for k in K for jj in Vk[k]+F) #eq.(10)

```

```

model.addConstrs(tau[i,k]==(phi_max[k] - e[i,k])*inverse_r for i in F for k in K)
#eq.(11)
model.addConstrs(T[i,k]>=l[i] for k in K for i in Nk[k]) #eq.(12a)
model.addConstrs(T[i,k]<=u[i] for k in K for i in Nk[k]) #eq.(12b)

model.addConstrs(e_bar[0[k],k]==phi_max[k] for k in K) #eq.(14)
model.addConstrs(e_bar[j,k]==e[j,k]-g[j,k] for k in K for j in Vk[k]+F) #eq.(15)

model.addConstrs(e[j,k]<=(e_bar[i,k]-theta[i,j])+(1-x[i,j,k])*M for k in K for i,j
in A[k]) #eq.(16)
model.addConstrs(g[i,k]==eta[i] for k in K for i in Vk[k]) #eq.(17)
model.addConstrs(g[i,k]==e[i,k]-phi_max[k] for i in F for k in K) #eq.(18)
model.addConstrs(e[i,k]>=phi_min[k] for k in K for i in Vk[k]+F+[D[k]]) #eq.(19)
model.addConstrs( y[ii,k] == sum( x[i,j,k] for i,j in A[k] if i==ii) for ii in F
for k in K) #eq.(20)

model.addConstrs(T[i,k]+t[i,j]-T[j,k]+sigma[i,j,k]<=0 for k in K for i,j in A[k]
if i==0[k]) #eq (22)
model.addConstrs(T[i,k]+tau[i,k]+t[i,j]-T[j,k]+sigma[i,j,k]<=0 for k in K for i,j
in A[k] if i in F) #eq.(23)
model.addConstrs(sigma[i,j,k]<=M*(1-x[i,j,k]) for k in K for i,j in A[k]) #eq.(24)
model.addConstrs(sigma[i,j,k]>=-M*(1-x[i,j,k]) for k in K for i,j in A[k])
#eq.(25)

model.addConstrs(e[j,k]>=e_bar[i,k]-theta[i,j]+sigma_tilde[i,j,k] for k in K for
i,j in A[k]) #eq.(26)
model.addConstrs(sigma_tilde[i,j,k]<=M*(1-x[i,j,k]) for k in K for i,j in A[k])
#eq.(27)
model.addConstrs(sigma_tilde[i,j,k]>=-M*(1-x[i,j,k]) for k in K for i,j in A[k])
#eq.(28)
model.addConstrs(T[i,k0] + tau[i,k0] + s_tilde[i,k0] <= T[omega[i],k] + M*(1- sum(
x[l,r,k] for l,r in A[k] if l==omega[i] ) ) for i in F_no_end for k in K for k0 in
K) #eq.(29)
model.addConstrs(s_tilde[i,k0]<=M*(1-y[i,k0]) for i in F for k0 in K) #eq.(30)
model.addConstrs(s_tilde[i,k0]>=-M*(1-y[i,k0]) for i in F for k0 in K) #eq.(31)

#VALID INEQUALITIES
model.addConstrs(e[j,k]<=phi_max[k] for k in K for j in Vk[k]+F+[D[k]]) #eq.(32)
model.addConstrs(e_bar[i,k]>=phi_min[k] + float(theta[i,q[i]]) for k in K for i in
Vk[k]) #eq.(33)

```

```

model.addConstrs(sum(y[i,k]*l[i] for k in K) <= T[omega[i],k] + M*(1- sum(
x[l,r,k] for l,r in A[k] if l==omega[i] ) ) for i in F_no_end for k in K) #eq.(34)
model.addConstrs(T[i,k]+t_tilde[i][s]+t[i,j]+sigma[i,j,k]<=u[j] for k in K for s
in range(S) for i,j in A[k] if i in Vk[k]) #eq.(35)
model.addConstrs(T[i,k]+tau[i,k]+t[i,j]+sigma[i,j,k]<=u[j] for k in K for i,j in
A[k] if i in F) #eq.(36)
for k in K:
    for k2 in K:
        if k2!=k:
            for i,j in A[k]:
                for i2,j2 in A[k2]:
                    if i==i2 and j==j2:
                        model.addConstr(x[i,j,k]+x[i2,j2,k2]<=1) #eq.(37)
for k in K:
    for i,j in A[k]:
        for i2,j2 in A[k]:
            if i==i2 and j!=j2:
                model.addConstr(x[i, j, k] + x[i2, j2, k] <= 1) #eq.(38)
            if j==j2 and i!=i2:
                model.addConstr(x[i, j, k] + x[i2, j2, k] <= 1) #eq.(39)
#model.addConstr(x[i,j,k]+x[i2,j2,k2]<=1 for k in K for k2 in K if k2!=k for i,j
in A[k] for i2,j2 in A[k2] if i==i2 and j==j2)
#model.addConstrs(x[i,j,k]+x[i2,j2,k]<=1 for k in K for i,j in A[k] for i2,j2 in
A[k] if i2==i)
#model.addConstrs(x[i,j,k]+x[i2,j2,k]<=1 for k in K for i,j in A[k] for i2,j2 in
A[k] if j2==j)

#CHANCE CONSTRAINTS
model.addConstrs(T[i,k]+t_tilde[i][s]+t[i,j]-T[j,k]+sigma[i,j,k]<=0 for k in K for
i,j in A[k] if i in Vk[k] for s in Sai[i-1]) #eq (41)

#OBJECTIVE FUNCTION
inverse_S = float(1/S)
obj = inverse_S*sum(sum( sum(z[i,j,k,s] for i,j in A[k] if i in Vk[k]+F+[O[k]])
for k in K) for s in range(S))

model.update()
#Add objective function to model and declare that we solve a minimization problem
model.setObjective(obj,GRB.MINIMIZE)
print('variables',model.numVars)
print('constraints',model.NumConstrs)
#model.NumConstrs()

```

```

# Solve the model and return results.
#model.params.NonConvex = 2 # allow to handle quadratic equality constraints -
which are always non-convex

model.optimize()
#model.computeIIS()
#model.write("model.mps")
if model.status == GRB.OPTIMAL: # check if the solver is capable of finding an
optimal solution
    #model.printAttr('X')
    print(model.status, 'optimal')
    print('Obj: %g' % model.objVal)
else:
    print(model.status, 'not optimal')

# print results
for v in model.getVars():
    if v.x > 0:
        print('%s %g' % (v.varName, v.x))

```

Απόσπασμα κώδικα 2.2: vladu_tools.py

```

"Tools for processing thesis data"
import numpy as np

def generate_trip_scenarios(mean, stdv, N):
    "Generate an N number of trip scenarios, based on a log-normal distribution"

    np.random.seed(345) #Ensures usage of a single seed for reproducibility
    trip_scenarios_sec = np.random.lognormal(mean=mean, sigma=stdv, size=N) #Trip
times in seconds
    trip_scenarios = trip_scenarios_sec/60 #Converts above trip time scenarios
into minutes
    trip_scenarios_list = list(trip_scenarios)
    return(trip_scenarios_list)

```

Απόσπασμα κώδικα 2.3: trip_instance_simulator.py

```

import numpy as np
import os
from scipy.spatial import distance
import matplotlib.pyplot as plt
import time
import seaborn as sns

```

```

#Define paths and scenario name
trips_scenario = 'd'
S_o = 1
a = 100
stdv_additives = [0.0, 0.05, 0.15, 0.3, 0.5]
S = 100
instances = 200
inverse_S = float(1/S)
dirname = os.path.dirname(__file__)
data_folder = os.path.join(dirname, 'Data')
tripData_path = os.path.join(data_folder, f'D2_S2_C10_{trips_scenario}_trips.txt')
resultData_path = os.path.join(data_folder, f'Results_{trips_scenario}_S{S_o}_a{a}.txt')

#Fetch data form trips file
trip_header = np.loadtxt(tripData_path, dtype=int, converters=float, max_rows=1)
vehicles = trip_header[0]
trips = trip_header[1]
charg_events = trip_header[2]
lam = trip_header[3]
travel_cost = trip_header[6]

depot_data = np.loadtxt(tripData_path, dtype=int, skiprows=1, max_rows=vehicles*2)
trip_data_int = np.loadtxt(tripData_path, dtype=int, skiprows = 1+vehicles*2,
max_rows=trips, converters=float)
trip_dataflt = np.loadtxt(tripData_path, dtype=float, skiprows = 1+vehicles*2,
max_rows=trips)
charg_event_data = np.loadtxt(tripData_path, dtype=int, skiprows = 1+vehicles*2+trips,
max_rows=charg_events)

#-----Define sets & parameters-----

#Depot stuff
K = [i+1 for i in range(vehicles)]
N = []; N_orig = {}; N_dest = {}
O = {}; D = {}; l = {}; u = {}

for k in K:
    j = k
    k -= 1
    O[j] = depot_data[k,0]
    N_orig[O[j]] = [depot_data[k,1], depot_data[k,2]]

```

```

N_dest[O[j]] = [depot_data[k,3], depot_data[k,4]]
l[O[j]] = depot_data[k,5]
u[O[j]] = depot_data[k,6]
D[j] = depot_data[k+vehicles, 0]
N_orig[D[j]] = [depot_data[k+vehicles, 1], depot_data[k+vehicles, 2]]
N_dest[D[j]] = [depot_data[k+vehicles, 3], depot_data[k+vehicles, 4]]
l[D[j]] = depot_data[k+vehicles,5]
u[D[j]] = depot_data[k+vehicles,6]
N.extend([O[j], D[j]])

#Trip stuff
V = []; mi = {}; ksi = {}
j = 0

for i in range(trips):
    V.append(trip_data_int[i,0])
    N_orig[V[-1]] = [trip_data_int[i,1], trip_data_int[i,2]]
    N_dest[V[-1]] = [trip_data_int[i,3], trip_data_int[i,4]]
    l[V[-1]] = trip_data_int[i,5]
    u[V[-1]] = trip_data_int[i,6]
    mi[V[-1]] = np.log(trip_dataflt[i, -1])
    ksi[V[-1]] = trip_dataflt[i, -2]
    N.append(V[-1])

#Charging stuff
F = []

for i in range(charge_events):
    F.append(charge_event_data[i,0])
    N_orig[F[-1]] = [charge_event_data[i,1], charge_event_data[i,2]]
    N_dest[F[-1]] = [charge_event_data[i,3], charge_event_data[i,4]]
    l[F[-1]] = charge_event_data[i,5]
    u[F[-1]] = charge_event_data[i,6]
    N.append(F[-1])

#Subset stuff
Nk = {}; Vk = {}

for k in K:
    Vk[k] = V
    Nk[k] = V + F + [O[k], D[k]]

```

```

# print(K)
#ex-variable stuff
x = {}; T = {}; tau = {}

for k in K:
    for i in Nk[k]:
        T[f'{i}, {k}'] = 0
        for j in Nk[k]:
            x[f'{i}, {j}, {k}'] = 0
        for i in F:
            tau[f'{i}, {k}'] = 0

#Open the results file and fetch the values of x, T and tau
with open(resultData_path, 'r') as file:
    result_data = file.readlines()

for line in result_data:
    if 'x[' in line:
        x_info = line.strip().split(sep=' ')
        x_index = f"{x_info[0].removeprefix('x[').removesuffix(',')},
{x_info[1].removesuffix(',')}, {x_info[2].removesuffix(',')}"
        x_value = float(x_info[-1])
        # print(x_index, x_value)
        if x_value > 0.9:
            for k in K:
                for i in Nk[k]:
                    for j in Nk[k]:
                        if f'{i}, {j}, {k}' == x_index: x[f'{i}, {j}, {k}'] = 1

    if 'T[' in line:
        T_info = line.strip().split(sep=' ')
        T_index = f"{T_info[0].removeprefix('T[').removesuffix(',')},
{T_info[1].removesuffix(',')}"
        T_value = int(float(T_info[-1]))
        for k in K:
            for i in Nk[k]:
                if f'{i}, {k}' == T_index: T[f'{i}, {k}'] = T_value

    if 'tau[' in line:
        tau_info = line.strip().split(sep=' ')
        tau_index = f"{tau_info[0].removeprefix('tau[').removesuffix(',')}"
        tau_value = int(float(tau_info[-1]))
        if tau_value > 0.1:

```



```

        for k in K:
            for i in F:
                if f'{i},{k}' == tau_index: tau[f'{i}, {k}'] = tau_value
if 'Obj:' in line:
    obj_data = line.strip().split(sep=' ')
    original_objValue = float(obj_data[1])
    # print(original_objValue)

#Compute b and t
t = {}; b = {}

for i in N:
    for j in N:
        if i == j: t[i, j] = 0
        else: t[i,j] = distance.euclidean(N_dest[i], N_orig[j])
        for k in K:
            b[i, j, k] = travel_cost * t[i,j]

#Construct arcs
A = {}

for k in K:
    A_a=[(O[k],j) for j in Nk[k] if j!=O[k] if u[j]>=l[O[k]]+t[O[k],j]]
#arcs_from_origin_depot
    A_b=[(i,D[k]) for i in Nk[k] if i not in [O[k],D[k]]] #arcs_to_destination_depot
    A_c=[(i,j) for i in Vk[k] for j in Vk[k] if i!=j if l[i]+t[i,j]<=u[j]]
#arcs_from_trip_to_trip
    A_d=[(i,j) for i in Vk[k] for j in F if l[i]+t[i,j]<=u[j]] #arcs_from_trip_to_charging
event
    A_f=[(i,j) for i in F for j in Vk[k] if l[i]+t[i,j]<=u[j]]
#arcs_from_chargingevent_to_trip
    A[k]=A_a+A_b+A_c+A_d+A_f
    A_a.clear();A_b.clear();A_c.clear();A_d.clear();A_f.clear()

#-----Cost Computations-----

#Define cost instances
cost = []
start_time = time.time()

for ia, additive in enumerate(stdv_additives):
    cost_temp = []

```

```

for Ins in range(instances):
    #Compute t_tilde scenarios
    t_tilde = {}

    for i in V:
        # np.random.seed(23)
        tripScenarios_sec = np.random.lognormal(mean=mi[i], sigma=(ksi[i] * (1 +
additive))), size=S)
        tripScenarios_min = tripScenarios_sec/60
        t_tilde[i] = list(tripScenarios_min)

    #Compute objective value (Operational Cost)
    objective_value = 0
    for s in range(S):
        for k in K:
            for i,j in A[k]:
                if i in Vk[k]:
                    objective_value += x[f'{i}, {j}, {k}'] * (b[i,j,k] + lam *
(T[f'{j}, {k}'] - T[f'{i}, {k}'] - t_tilde[i][s] - t[i,j]))
                if i in F:
                    objective_value += x[f'{i}, {j}, {k}'] * (b[i,j,k] + lam *
(T[f'{j}, {k}'] - T[f'{i}, {k}'] - tau[f'{i}, {k}'] - t[i,j]))
                if i == O[k]:
                    objective_value += x[f'{i}, {j}, {k}'] * (b[i,j,k] + lam *
(T[f'{j}, {k}'] - T[f'{i}, {k}'] - t[i,j]))
            cost_temp.append(objective_value * inverse_S)
        print(f"{Ins + 1} cost instances computed for {additive}")

    cost.append(cost_temp)
end_time = time.time()
time_taken = end_time - start_time
print(f'Computation took {time_taken:.0f} seconds to complete.')

#Plot box plots of the cost instances and display the original objective value with a solid
line
plt.figure(figsize=(10, 6))
sns.boxplot(data=cost, whis=1.5)
plt.axhline(y=original_objValue, color='red', linestyle='solid', linewidth=2, label=f'Model
objective value = {original_objValue}')
plt.title(f'Box plot of simulated cost instances, S{S} a{a} {trips_scenario}')
plt.xlabel('Additional standard deviation of travel times')
plt.ylabel('Operational cost')

```

```
plt.xticks(ticks=[0, 1, 2, 3, 4], labels=['0%', '5%', '15%', '30%', '50%'])
plt.legend()

plt.savefig(f'Data/IQR_{trips_scenario}_S{S_o}_a{a}.png')
plt.show()
```